

MINISTERIO DE MINAS Y ENERGIA

ANALISIS DE SISTEMAS

1995

ANALISIS DE SISTEMAS

Ing. Herminio Sbarra

Este documento ha sido parcialmente financiado con el aporte de la
Unión Europea.

San Carlos de Bariloche
- 1995 -

I N D I C E

PROLOGO		I
INTRODUCCION		1
I	MODELOS Y SIMULACION	7
	I.1. Sistemas estáticos y dinámicos	9
	I.2. Modelos por ecuaciones diferenciales y por diferencias finitas	11
	I.3. Espacio de estados	24
II	MODELOS Y TECNICAS DE OPTIMIZACION ESTADICA. PROBLEMAS DE ASIGNACION DE RECURSOS	31
	II.1. Programación clásica, sin restricciones	31
	II.2. Programación no lineal con restricciones de igualdad. Función objetivo	34
	II.2.1. Método de los multiplicadores de Lagrange	35
	II.2.2. Aplicación al despacho económico de cargas	37
	II.2.3. Interpretación matemática y económica	42
	II.3. Programación lineal con restricciones de desigualdad	44
	II.3.1. Las condiciones de Kuhn-Tucker	45
	II.4. Programación lineal	48
	II.4.1. Definiciones fundamentales. Convexidad	50
	II.4.2. Planteo del problema de P.L. Algoritmo de solución	52
	II.4.3. Dualidad. Interpretación de las variables duales	60
	II.4.4. Aplicaciones	68
III	CONTROL Y OPTIMIZACION DE SISTEMAS DINAMICOS.	77
	III.1. Sistemas dinámicos. Control	77
	III.2. Optimalidad	79
	III.2.1. Programación dinámica	80
	III.2.1.1. Aplicaciones a un despacho económico hidrotérmico	85
	III.2.2. Principio del Máximo de Pontryagin	94
	III.2.2.1. Ejercicios y aplicaciones	97
IV	TEORIA Y TECNICAS DE DECISION	109
	IV.1. Análisis de decisión uniojetivo	110
	IV.2. Reglas de decisión. Teoría de la utilidad	113
	IV.3. Decisión multiobjetivo	120
	IV.4. Optimización vectorial. Optimo Paretiano.	123

20/10/21

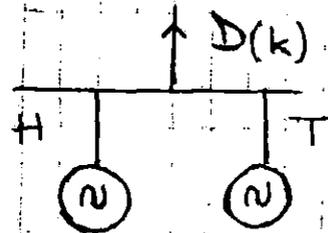


V)	ANÁLISIS CUALITATIVO DE SISTEMAS NO LINEALES	136
	V.1. Singularidades: puntos críticos y ciclos límites. Estabilidad	136
	V.2. Estabilidad según Liapunov	147
<u>ANEXO 1</u>	(a) Programación no lineal. Condiciones de existencia del óptimo	A.1.1
	(b) Condiciones de Kuhn y Tucker	A.1.2
<u>ANEXO 2</u>	(a) Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	A.2.1
	(b) Sistemas en diferencias finitas	A.2.7
<u>ANEXO 3</u>	Programación dinámica	A.3.1
<u>ANEXO 4</u>	(a) El principio del Máximo para diversas condiciones	A.4.1
	(b) Interpretación de las variables de coestado	A.4.2
	(c) Método de Lagrange, programación dinámica y el principio del máximo	A.4.3
<u>ANEXO 5</u>	Teoría de la dualidad	A.5.1
<u>ANEXO 6</u>	Teoría de singularidades	A.6.1
	(a) Bifurcaciones. Atractores y caos	A.6.1
	(b) Teoría de catástrofes	A.6.4
	(c) Aplicaciones en Sociología, Política y Economía	A.6.8
	BIBLIOGRAFIA	B.1

PROGRAMACION DINAMICA

METODO BELLMAN

Despacho hidroeléctrico



X_k : volumen embalsado en la etapa k en hm^3

J_k : llegada de agua en cada etapa

$$\bar{X}_k > X_k > \underline{X}_k$$

- u_k : agua turbinada en la central hidroeléctrica en toda la etapa k.

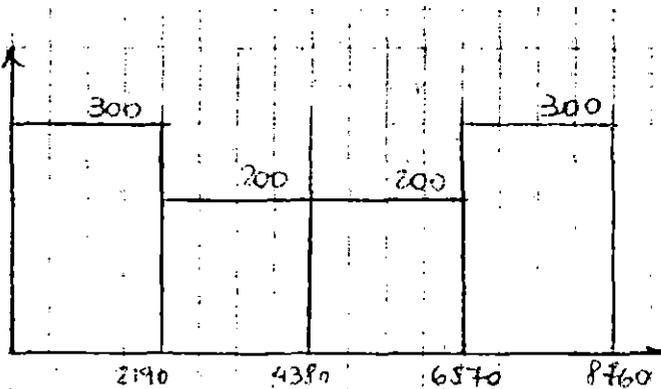
Se quiere minimizar el consumo de combustible de un año de operación, respetando las restricciones.

Datos: consumo de la central térmica (como máquina única)

$$G(T) = 0,01 T^2 + 10 T$$

T MW
G(T) en dólares/hora

Demanda:



$$X_0 = 30$$

$$50 > X > 10$$

$$X_4 = 50$$

- $J_1 = 30$
- $J_2 = 50$
- $J_3 = 10$
- $J_4 = 20$

$$- H = u \times 5 \quad u \text{ en } Hm^3 \quad H \text{ en MW}$$

Calcular la economía en todo el periodo.

FOR METODO DE LAGRANGE

Costo de X_i en MW 1×10^6 Kcal = 10 dólares

$$G(X_1) = (0,006 X_1^2 + 2 X_1) 10^6 \text{ Kcal/hora}$$

$$100 > X_1 > 10 \text{ MW}$$

$$G(X_2) = (0,010 X_2^2 + 1,5 X_2 + 120) 10^6 \text{ Kcal/hora}$$

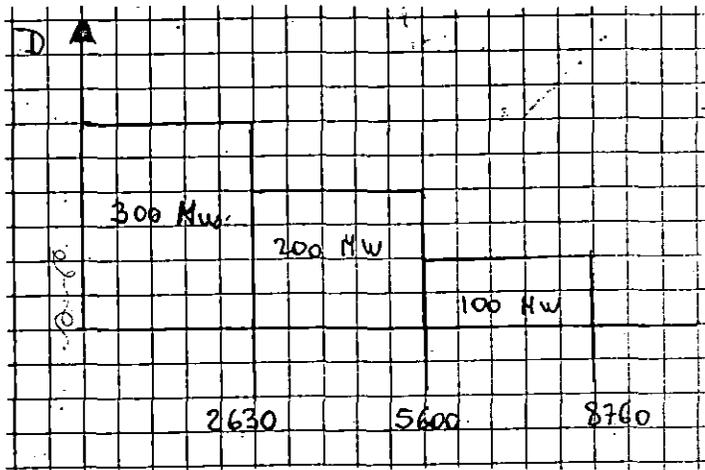
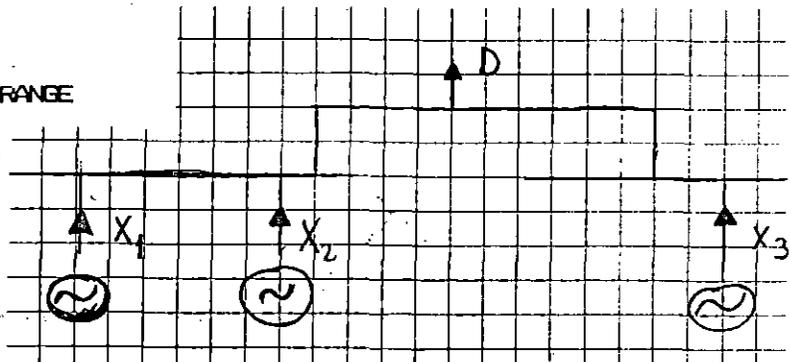
$$120 > X_2 > 15 \text{ MW}$$

$$G(X_3) = (0,009 X_3^2 + 1,65 X_3) 10^6 \text{ Kcal/hora}$$

$$115 > X_3 > 20 \text{ MW}$$

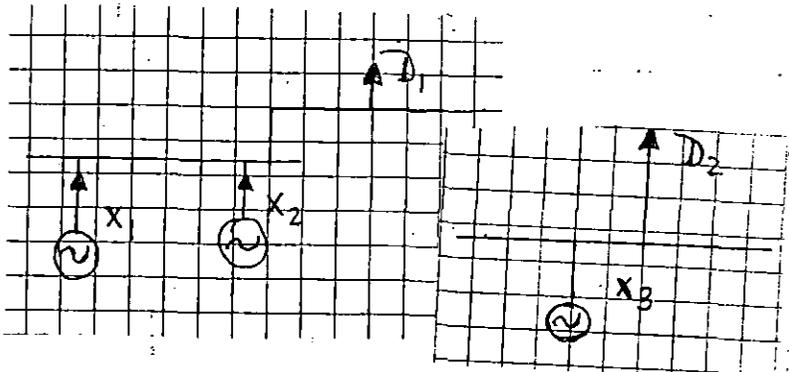
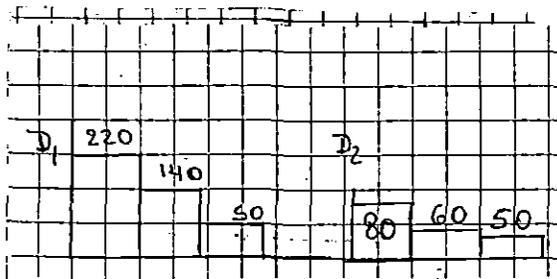
Pérdidas en la red:

$$P_L = 0,1 X_1 + 0,15 X_2$$



1) Calcular el costo total del despacho económico según la demanda D durante un año.

2) Calcular el mismo con la consiguiente configuración:



¿Hay economías por la interconexión?

3) Calcular para 1) el ingreso total tomando como valor del mercado el precio marginal y comparar con el resultado anterior.

PROLOGO

Esta guía del cursillo "Análisis de Sistemas", tiene por objeto encuadrar los temas tocados en el mismo, sin profundizarlos desde un punto de vista matemático, pero desarrollando ejercicios de aplicación directa a la economía y planificación energética.

Cada capítulo, requeriría un desarrollo más detallado, tanto por la dificultad como por el interés que presentan los distintos tópicos. Resultando ello imposible en nuestro caso, se ha optado por agregar en anexos algunos complementos teóricos y una guía bibliográfica, que es la que nos ha servido de base en estos apuntes.

Hemos tratado de poner un cierto orden conceptual y una unidad de desarrollo, en esta disciplina, llamada con más propiedad Ingeniería de Sistemas, basándonos en los avances producidos en los últimos quince años. Confluyen en la misma, la Investigación Operativa, la teoría de los servomecanismos, la cibernética, la teoría del Control y la teoría general de sistemas. En campos tan diversos como la Física, la Economía, la Biología, la Sociología y la Política, aparece una identidad de las estructuras lógico-matemáticas de los distintos sistemas que tratan estas ciencias, lo que permite el uso de similares algoritmos, así como la utilización de los conocimientos teóricos y la experiencia de una en otras.

Nos parece interesante señalar, que la introducción del concepto de espacios de estado así como algunas nociones de espacios funcionales, ha permitido importantes avances en la ingeniería de sistemas. No debemos olvidar sin embargo, que el reduccionismo matemático por sí solo, opera sobre modelos, sobre sus estructuras, pero no sobre los contenidos conceptuales de los sistemas reales, aunque, pese a ello, ayuda a clarificar nuestros enfoques y a guiar nuestra intuición.

ANTONIO DECESSIONE

INTRODUCCION

Desde hace mucho tiempo, el concepto de sistema es fundamental en diversas disciplinas, tal el caso del sistema nervioso y el endocrino en biología o el sistema de la economía nacional en economía. Conceptualizado un sistema, establecidas sus interrelaciones con otros y analizada su estructura, se establece un modelo para el estudio de su comportamiento o para mejorar su operación o diseño. En los primeros tiempos, los modelos eran analógicos, o sea se realizaba una construcción de un sistema físico que representaba al sistema en estudio, pues estaba regido por la misma estructura y leyes matemáticas. Tal el caso de estudiar una compleja red eléctrica representándola por un modelo hidráulico.

El avance de las técnicas digitales, rescatadas por la aparición de las computadoras, promovió el uso de modelos matemáticos, que son los que casi con exclusividad se utilizan hoy en día.

Formalmente, el estudio de sistemas, comenzó en la Segunda Guerra Mundial con la Investigación Operativa, la teoría de juegos y la cibernética, dada su importante aplicación a problemas bélicos.

La Investigación Operativa, es una interdisciplina científica, que estudia la aplicación de métodos matemáticos que sirvan de base y apoyo a la toma de decisiones por los niveles ejecutivos, obteniendo resultados cuantificables, en lo posible óptimos.

La Teoría de Juegos, trata de aportar una teoría matemática aplicable a las situaciones de conflicto. Su desarrollo se debe a Von Newman [15]*, quien estableció una serie de hipótesis acerca de la racionalidad de los oponentes, y basado en las mismas desarrolló modelos probabilísticos que permiten obtener la estrategia o modo de acción óptima para cada jugador.

La Cibernética es la disciplina que analiza bajo un aspecto funcional, los procesos de dirección, control y optimización de los sistemas dinámicos complejos, en los cuales la información juega un papel esencial.

La frase aristotélica con su noción holística "el todo es más que la suma de sus partes" es una definición del problema básico de los sistemas. Las propiedades y naturaleza de los procesos en los niveles superiores, no son explicable por la suma de las propiedades y naturaleza de los procesos de sus componentes, si éstos se toman aisladamente.

Los problemas planteados por los Sistemas, son muy antiguos, pero no salían del campo de la filosofía porque faltaban técnicas matemáticas adecuadas y porque esos problemas requerían una nueva epistemología.

* [] Indica la referencia bibliográfica.

Los nuevos desarrollos llevaron a nuevas "matemáticas gestálticas", en las que es fundamental, no la noción de cantidad, sino la de relación, o sea, la de forma y orden.

Estos conceptos pertenecen a la Teoría General de Sistemas, desarrollada inicialmente por L. von Bertalanffy (16), aunque en nuestro caso, de aplicaciones más restringidas, nos referiremos a sistemas más particulares.

Definiremos un Sistema como un conjunto de elementos, objetos o entes vinculados entre sí y con el medio ambiente, mediante enlaces que constituyen fuerzas, flujos de energía, materia o información.

Los sistemas, en cuanto a su dependencia del tiempo se pueden clasificar en estáticos y dinámicos. En los primeros, su comportamiento es fijo y en los dinámicos evoluciona con o es función del tiempo.

Un vehículo que se desplaza, el sistema de calefacción de un edificio, una estructura económica, la operación de un embalse, constituyen ejemplos de sistemas dinámicos.

Muchos sistemas dinámicos, con los que nos encontramos cotidianamente, pueden ser analizados intuitivamente, como en el sistema hombre-automóvil o en la planificación de un día de trabajo. En general, para el análisis de un sistema complejo, se requiere de una representación matemática que aporte la necesaria economía de lenguaje y el correspondiente marco conceptual.

Comunmente, los sistemas dinámicos son modelizados matemáticamente en términos de ecuaciones en diferencias finitas si las variables son discretas y varían entre periodos finitos o por ecuaciones diferenciales si las variables son continuas y se analiza su variación instantánea.

Los sistemas estáticos, se modelizan simplemente por ecuaciones algebraicas.

En el caso de sistemas con memoria (históricos), la modelización es a través de ecuaciones integro-diferenciales.

Llamaremos variables de estado $X(t)$ de un sistema, el conjunto mínimo de números o variables que describen completamente las características del sistema. En el caso de un sistema de generación hidroeléctrica, su estado queda determinado por la variable

" $X(t)$ = cantidad de agua embalsada en el tiempo t ".

El número n de variables de estado define la dimensión u orden del sistema. El subespacio de E^n en el cual se define el rango de variación de $X(t)$, se denomina Espacio de estado.

Por ejemplo si en el espacio E^3 queda definido un vector de estado

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

el lugar geométrico de los sucesivos estados del sistema, se llama trayectoria de estado y representa la evolución del sistema en un determinado periodo (Ver Figura 1).

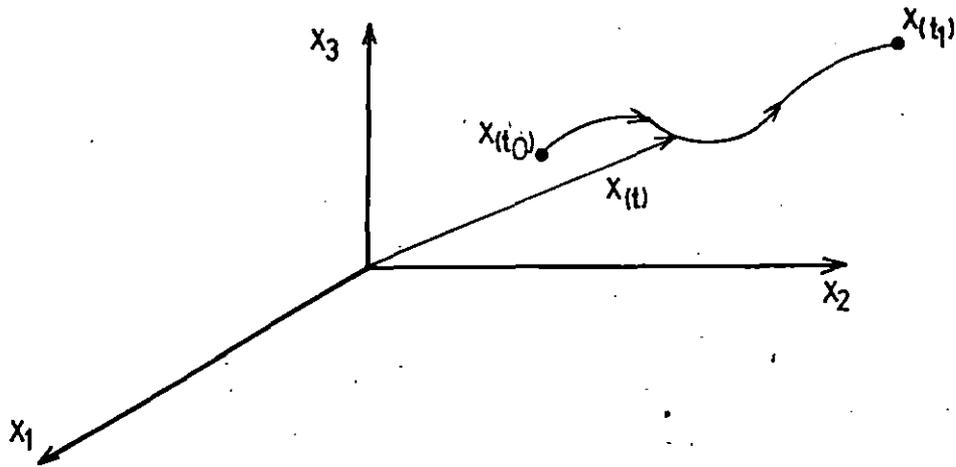


Figura 1

Se dirá que un sistema dinámico queda "descrito internamente" por un conjunto de ecuaciones diferenciales que representan los procesos o conductas que en el "interior" del mismo hacen corresponder a un conjunto de variables de entrada (inputs), un conjunto de variables de salida (outputs), reflejando la dinámica del sistema.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

Este sistema evoluciona, sin que se ejerza sobre él ningún tipo de control.

La "descripción interna" es esencialmente estructural; procura describir la conducta de los sistemas en términos de las variables de estado y de su interdependencia.

Hay también una "descripción externa", funcional, en que la conducta del sistema se describe en términos de su interacción con el medio ambiente. En este caso, el sistema es modelizado por una "caja negra" y su descripción se da en términos de las variables de entrada y de salida y de funciones de transferencia que las relacionan. Ocurre esta descripción cuando desconocemos las leyes o relaciones internas del sistema o su complejidad es tal que impide una formulación matemática, pero sin embargo es posible aproximar una relación entre las variables de entrada y salida. (Figura 2).

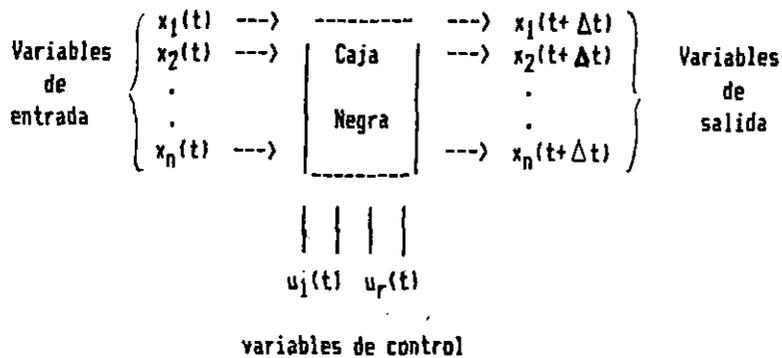


Figura 2

Este es el caso, por ejemplo, para el conductor de un automóvil, las variables $x_i(t)$ serán la velocidad del vehículo y su dirección y las variables de control, el ingreso de gasolina por operación del acelerador y el giro del volante. El sistema es físicamente complicado si queremos analizar la mezcla de gasolina/aire, su explosión en los cilindros, transmisión, etc., por lo que por un método de aprendizaje del tipo prueba-error, logramos asumir e internalizar en forma automática las funciones de transferencia de entrada-salida.

Por último aclaramos que no estudiaremos en particular los modelos de los que se ocupa la econometría. Estos modelos, que se construyen con propósitos de predicción o análisis de políticas, son generalmente modelos de series temporales y modelos de regresión uni y multiecuacionales. Los modelos de series temporales suelen adoptarse en aquellos casos en que se sabe muy poco o nada acerca de las variables que influyen sobre la variable en estudio y cuando se dispone de un gran número de observaciones. Tal sería el caso de las series hidrológicas, aunque en este caso la incertidumbre esencial del sistema nos lleva a operar con modelos probabilísticos.

En los modelos uni y multiecuacionales, la variable objeto de estudio se explica mediante una única función (lineal o no

lineal) de una o varias variables explicativas.

Estos modelos se utilizan a menudo para predecir los cambios de los tipos de interés a corto y largo plazo y también de muchas otras variables económicas y empresariales.

Algunos sistemas, llamados automáticos o sistemas homeostáticos, autorregulan su comportamiento sin necesidad de controlarlos. Es el caso de la temperatura de una cámara frigorífica donde se ordena el estado deseado de temperatura posicionando un regulador o más notable aun los mecanismos que en los seres vivos mantienen la temperatura del cuerpo, la concentración de electrolitos y de hormonas en valores prefijados, independientemente de las condiciones del medio externo.

Otros sistemas modifican su comportamiento mediante la acción de variables de control, comandadas externamente, por ejemplo un cohete guiado por variables que controlan el consumo de combustible (empuje) y su dirección en el espacio.

Finalmente, los sistemas de control óptimo son aquellos en los que se fija un funcional objetivo que se quiere optimizar.

En el caso citado de un cohete, el objetivo puede ser llegar al punto deseado con un consumo mínimo de combustible o en el menor tiempo posible.

I MODELOS Y SIMULACION

La simulación es una técnica mediante la cual se pretende reproducir en forma acelerada la evolución de un sistema ante diferentes condiciones exógenas.

Los modelos utilizados para este fin pueden clasificarse en dos grandes grupo: los modelos físicos o analógicos y los modelos lógico-matemáticos o digitales.

Un dique se puede representar mediante un modelo a escala o bien podemos establecer un conjunto de ecuaciones que expliquen parte del funcionamiento, un subsistema del sistema real.

Un sistema de vuelo (avión-piloto en determinadas condiciones exteriores) se representa mediante paneles mimicos y una computadora que simulen condiciones normales y anormales para entrenamiento de pilotos.

Un sistema eléctrico de potencia puede ser representado por un conjunto de ecuaciones que surgen de aplicar las leyes de Kirchoff, a los fines de simular los flujos de energía ante determinadas condiciones de generación.

En general los que mejor satisfacen el objetivo de reproducir el accionar del sistema en forma acelerada son los modelos digitales.

Los modelos de simulación pueden tener por objeto ver cómo reacciona un determinado sistema ante ciertas condiciones externas o incluir variables de decisión que pueden modificar su evolución natural. En este último caso diremos que se trata de modelos de simulación decisionales.

Si el modelo requiere que en cada etapa o periodo de tiempo se le indiquen las decisiones o políticas a considerar diremos que éstas son exógenas al modelo. Si, por el contrario, dentro del modelo están establecidos criterios que permiten ir definiendo internamente las decisiones a adoptar diremos que el modelo incluye el proceso de decisión.

Adicionalmente pueden incluirse criterios que permitan establecer la "bondad" de cada una de las evoluciones simuladas del sistema en función de las políticas aplicadas.

La técnica de simulación sólo nos permite saber cual es la mejor entre un número finito de políticas ensayadas, pero no nos dice nada acerca de otras no simuladas. Esto es lo que la distingue de las técnicas de optimización.

Tanto los sistemas como los modelos de simulación que los representan pueden ser determinísticos o aleatorios.

Para la simulación de un fenómeno se presentan las alternativas resumidas en el siguiente cuadro:

Simulación de un fenómeno	Determinístico	Por un modelo determinístico (1)
		Por un modelo aleatorio (2)
	Aleatorio	Por un modelo determinístico (3)
		Por un modelo aleatorio (4)

Pueden citarse los siguientes ejemplos de cada una de las alternativas planteadas.

- (1) Simulación de una obra o proyecto mediante programación por camino crítico (CPM).
- (2) Determinación del área de una figura irregular aplicando el método de Montecarlo.
- (3) Modelos determinísticos de gestión de stocks, reemplazo de equipos por falla, etc.
- (4) Modelos aleatorios de gestión de stocks, sistemas telefónicos, sistemas de tráfico o redes, procesos de Markov, etc.

Algunos autores prefieren reservar el término simulación para los modelos aleatorios (simulación estadística), mientras que denominan experimentación numérica a la simulación de un fenómeno mediante un modelo determinístico.

El problema de la simulación estadística puede aclararse a través de un ejemplo: el modelo desarrollado en Electricité de France para analizar la seguridad del abastecimiento de energía eléctrica considerando la red de transporte.

Se considerará una falla del sistema toda vez que no sea posible satisfacer la demanda. La magnitud de la falla será, entonces, la diferencia entre la energía demandada y la ofertada.

En el modelo se consideran tres situaciones posibles en las que puede producirse una falla:

- nivel muy alto de demanda
- indisponibilidad de algún equipamiento térmico
- baja hidraulicidad (es decir reducción de la generación de las centrales hidroeléctricas debida a un bajo aporte de agua).

Estas precisamente constituyen los tres tipos de variables aleatorias a considerar, sobre las cuales deberá conocerse las leyes de probabilidad a partir de información histórica sobre sus comportamientos.

El modelo consiste en simular un estado posible del sistema (nivel de demanda, equipos disponibles, cantidad de agua en las centrales hidroeléctricas) considerando las respectivas leyes de distribución de cada variable aleatoria y resolver el abastecimiento de forma tal que la magnitud de la falla sea mínima, mediante el empleo de programación lineal.

De esta forma a cada estado del sistema se le asocia la falla correspondiente.

Repetiendo este proceso un gran número de veces, puede obtenerse la función de densidad de probabilidad de falla.

En general la repetición del proceso se efectúa automáticamente en este tipo de modelos generando mediante tablas de números al azar los estados del sistema. Este método se conoce con el nombre de MONTECARLO. El problema más importante que presenta, desde el punto de vista teórico, es la determinación del número mínimo de estados a simular para garantizar la confiabilidad de la ley de distribución de fallas. Adicionalmente pueden existir algunos problemas prácticos en su uso, debido a que si el análisis de cada estado del sistema requiere mucho tiempo, cada corrida del modelo para la obtención de la ley de distribución de las variables estudiadas puede ser extremadamente larga.

Esta situación puede plantearse en el caso del ejemplo anterior, donde la simulación se combina con una técnica de optimización, si el sistema es grande y se lo representa detalladamente.

I.1. Sistemas estáticos y dinámicos

Un sistema estático corresponde a una situación producida en un corte dado del tiempo, donde las relaciones entre sus elementos son números y no variables que dependan del tiempo. Es el caso de asignación de recursos entre varias actividades, como repartir la carga eléctrica entre varios generadores o planificar la producción de una fábrica. La modelización de estos sistemas está dado por una relación algebraica del tipo

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n)$$

donde:

$g_i(x_i)$ es la utilidad obtenida en la actividad i por asignar la cantidad de recurso x_i

$R(x_1, \dots, x_n)$ es la utilidad total obtenida.

Estos sistemas no son generalmente libres pues como en el caso ejemplificado se exige que:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = T$$

o sea tener en cuenta que la cantidad de recursos no puede ser negativa y la asignación total es un dato, por ej. demanda de energía, horas-hombre disponibles, capacidad de carga de un barco, etc.

El control de este sistema consiste en variar las asignaciones parciales, respetando las restricciones y el control óptimo significa por ejemplo optimizar la función R, buscando según el caso el máximo o el mínimo.

Sistemas dinámicos son aquellos en los cuales el comportamiento del mismo evoluciona con el tiempo.

Un vehículo que se desplaza, el sistema de calefacción de un edificio, un sistema de inventario, una estructura económica, la operación de un embalse, constituyen ejemplos de sistemas dinámicos.

Muchos sistemas dinámicos con los que nos encontramos cotidianamente pueden ser analizados intuitivamente, pero en general, para el análisis de un sistema complejo se requiere de una representación matemática eficiente que aporte la necesaria economía de lenguaje y el marco conceptual.

Comunmente, los sistemas dinámicos son representados matemáticamente en términos de ecuaciones en diferencias finitas o en ecuaciones diferenciales, según se considere que las variables son discretas (variaciones entre periodos) o continuas (variaciones instantáneas).

En un sistema hidroeléctrico, la ecuación de continuidad, que indica el volumen de agua en un momento dado si discretizamos el sistema tomando intervalos de tiempo Δt , se expresa por una ecuación en diferencias

$$V_t = V_{t-\Delta t} + Q_i - Q_e - Q_r - Q_v - Q_d$$

donde:

- V_t = volumen en el instante t
- $V_{t-\Delta t}$ = volumen en el instante $t-\Delta t$
- Q_i = agua que entró en Δt
- Q_e = agua usada para generación eléctrica en Δt
- Q_r = agua usada para riego en Δt
- Q_v = agua evaporada en Δt
- Q_d = agua desembalsada por vertedero en Δt

Si consideramos la variación instantánea del volumen con el tiempo o sea, consideramos un sistema continuo tendremos:

$$\frac{dV(t)}{dt} = f(Q_i(t), Q_e(t), Q_r(t), Q_v(t), Q_d(t))$$

La representación matemática de un sistema requiere en general, tener en cuenta un cierto número de variables interrelacionadas, siendo el álgebra vectorial una herramienta que permite representar eficientemente esta característica.

En resumen, la representación matemática de sistemas dinámicos de variables múltiples requiere el empleo conjunto de ecuaciones diferenciales y álgebra vectorial.

Dada la complejidad de los sistemas reales, se los separa en subsistemas, y por supuesto se hacen hipótesis simplificadoras sobre su estructura. De este modo es posible construir un "modelo" lógico-matemático que representa más o menos adecuadamente la realidad. En lenguaje matemático se dice que hay un isomorfismo entre el sistema real y el modelo que lo representa.

1.2 Modelos por ecuaciones diferenciales y por diferencias finitas

Muchos sistemas dinámicos pueden ser analizados intuitivamente, sin recurrir a las matemáticas, pero las situaciones más complejas deben ser encaradas sistemáticamente y las matemáticas pueden proveer en esos casos economía de lenguaje y un marco conceptual.

De un modo natural las ecuaciones diferenciales aparecen como el modelo más adecuado para representar los sistemas dinámicos, en caso de considerar el tiempo t como una variable continua. Los sistemas más corrientes son los llamados multivariables, pues involucran varias variables dependientes del tiempo $x_1(t) \dots x_n(t)$, interrelacionadas entre sí. Estas $x_i(t)$ son las "variables de estado" y su conocimiento da una indicación precisa del estado del sistema para todo tiempo t . Normalmente la expresión matemática será un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{array} \right.$$

con n condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_1^0; \quad x_2(0) = x_2^0; \quad \dots; \quad x_n(0) = x_n^0$$

Las soluciones serán entonces las $x_i(t)$ para $i=1,2,\dots,n$ cuyo significado geométrico es una trayectoria con origen en las x_i^0 .

En algunos sistemas dinámicos, las variables no dependen del tiempo t en forma continua, sino que los valores se consideran en puntos de t separados por valores Δt

$$k=0; \quad k=\Delta t; \quad k=2.\Delta t; \quad \dots \quad k=n.\Delta t$$

lo que más corrientemente se indica como

$$k=0; \quad k=1; \quad k=2; \quad \dots; \quad k=n$$

la expresión matemática del modelo, equivalente al caso del sistema (1), es un sistema de ecuaciones en diferencias finitas:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = f_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \end{cases}$$

Con las n condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_1^0; \quad x_2(0) = x_2^0; \quad \dots; \quad x_n(0) = x_n^0$$

Las soluciones de (2) son las trayectorias como en (1), pero no líneas continuas sino puntos aislados.

Hay una íntima relación entre los sistemas (1) y (2) y este último tiende al (1) cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

En el Anexo 2 se recuerdan las nociones matemáticas generales y algunos ejercicios. Daremos ahora algunos ejemplos de aplicación práctica que ayudarán a conceptualizar las nociones teóricas.

Ejemplo a): Crecimiento geométrico

El crecimiento de poblaciones, intereses acumulados, aumento de biomasa, consumo energético, puede ser descrito por una ley lineal en diferencias finitas:

$$x(k+1) = ax(k) \qquad a > 0 \text{ real}$$

$x(k)$ es el valor de la población u otra magnitud en el instante k (recordemos que k significa $k \cdot \Delta t$). Si para $k=0$ la población inicial es x^0 , como la ecuación característica es

$$\lambda = a$$

la solución general será

$$x(k) = x^0 \cdot a^k \quad \text{para } k=0,1,2,\dots$$

A este esquema de crecimiento se lo conoce como crecimiento geométrico.

Ejemplo b): Crecimiento exponencial

Es la versión del ejemplo anterior para el caso de variación continua en función del tiempo. Se expresa por una ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \cdot x(t) \quad x(0) = x^0$$

la solución es

$$x(t) = x^0 \cdot e^{rt}$$

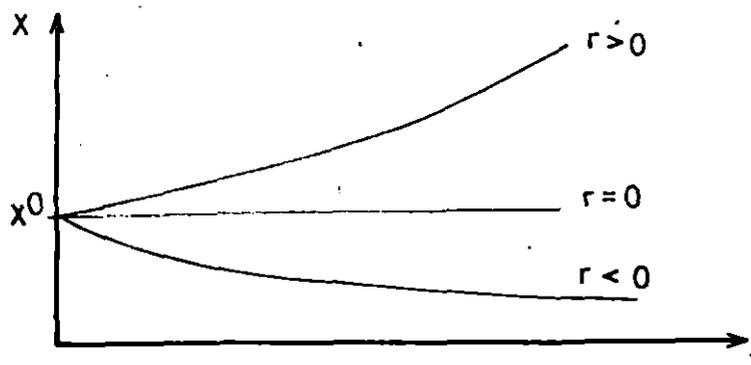


Figura 1.1

Ejemplo c): Crecimiento saturado

La magnitud de las poblaciones en el ejemplo b) se duplica con una tasa constante, pero en la práctica la mayoría de las poblaciones están limitadas en su crecimiento por la disponibilidad de recursos. En ese caso la ecuación diferencial queda modificada de esta manera:

$$\frac{dx}{dt} = r \cdot x \cdot \frac{(k-x)}{k} \quad (k \text{ es la capacidad de carga})$$

esta es la ecuación logística, no lineal, cuya solución se grafica

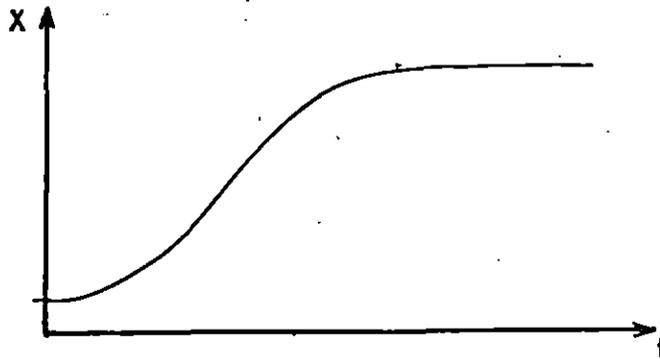


Figura 1.2

Ejemplo d): Una cohorte de población

Una cohorte es un conjunto de individuos nacidos simultáneamente y que forman una población homogénea. Este conjunto está sometido a cierta mortalidad y también al crecimiento de cada uno de los individuos supervivientes. Para algunos casos muy importantes, este modelo es más satisfactorio que los vistos anteriormente.

Supongamos que se quiera representar la pirámide de población de un país o región agrupando los individuos por edad, en estratos de 5 años cada uno (cohorte).

Se considerará, para simplificar, sólo la población femenina.

La observación del sistema en un momento dado permite definir los valores de las siguientes variables:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{N}^\circ \text{ de personas entre } 0 \text{ y } 5 \text{ años} \\ x_2 &= \text{N}^\circ \text{ de personas entre } 5 \text{ y } 10 \text{ años} \\ &\vdots \\ x_n &= \text{N}^\circ \text{ de personas entre } 5(n-1) \text{ y } 5n \text{ años} \end{aligned}$$

Eligiendo n suficientemente grande puede cubrirse la edad de todos los individuos vivos.

La única relación visible entre estas variables es que en conjunto representan a la población total, P . Por lo tanto:

$$P = \sum_{i=1}^n x_i$$

Esta representación estática del sistema no reviste mucho interés comparado con el análisis dinámico del sistema.

Para facilitar el planteo del modelo dinámico se calculará la población en cada estrato cada cinco años. Por lo tanto, si k representa un año t cualquiera, $k+1$ corresponde al año $t+5$.

Si se supone conocida la distribución de población en cada estrato en el período k , representada por el vector

$$\underline{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$$

en el período $k+1$ las componentes del vector de estado estarán dadas por:

- a) para todos los estratos salvo el primero, la población en el período $k+1$, será igual a la población que tenía el estrato inmediato anterior en el período k , menos las defunciones ocurridas en dicho período.

$$x_{i+1}(k+1) = x_i(k) - \theta_i \cdot x_i(k) = (1 - \theta_i) \cdot x_i(k) = \delta_i \cdot x_i(k) \quad \forall i : 0 \leq i < n$$

donde

θ_i es la tasa de defunción del estrato i ($0 \leq \theta_i \leq 1$)
 δ_i es la tasa de sobrevivencia del estrato i ($0 \leq \delta_i \leq 1$)

- b) La población del primer estrato estará dada por todos los nacimientos ocurridos en el período menos las defunciones registradas.

$$x_0(k+1) = \sum_{i=0}^n a_i x_i(k) \delta_i$$

donde a_i es la tasa de fecundidad por el porcentaje de población femenina para el estrato i .

Por lo tanto la dinámica del sistema puede describirse mediante las ecuaciones:

$$x_0(k+1) = \sum_{i=0}^n a_i x_i(k) \delta_i$$

$$x_{i+1}(k+1) = x_i(k) \delta_i \quad \forall i \geq 0$$

Ejemplo e): Una economía nacional

Formularemos en diferencias finitas un modelo de un sistema dinámico de una economía nacional, donde la aplicación discreta está justificada por la índole del problema planteado. Normalmente el t será un año o en algunos casos, trimestres.

Cuatro variables definen este modelo [6], [9], [17]

- $Y(k)$ = Producto Nacional
- $C(k)$ = Consumo
- $I(k)$ = Inversión
- $G(k)$ = Gastos del Gobierno

$Y(k)$ es el valor total de los bienes y servicios producidos durante el período o alternatively los ingresos totales de todos los individuos del sistema.

La ecuación básica es

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k) \quad (1)$$

o sea el ingreso total se aplica a consumo de bienes y servicios, inversiones o pagos al gobierno.

Se supondrá que el consumo es una fracción fija del producto nacional:

$$C(k) = m Y(k) \quad 0 < m < 1 \quad (2)$$

m es la propensión marginal a consumir.

La ecuación dinámica del sistema es:

$$Y(k+1) - Y(k) = b I(k) \quad b > 0 \quad (3)$$

b es el factor de crecimiento.

Esta ecuación expresa que la inversión en un año dado aumentará el producto nacional en los años futuros.

Sustituyendo (2) en (1)

$$Y(k) = m Y(k) + I(k) + G(k) \quad (4)$$

despejando en (3)

$$I(k) = \frac{Y(k+1) - Y(k)}{b}$$

la (4) se transforma en

$$Y(k) = a Y(k) + \frac{Y(k+1) - Y(k)}{b} + G(k)$$

Finalmente reagrupando

$$Y(k+1) = [1+b(1-a)].Y(k) - b.G(k) \quad (5)$$

$G(k)$ oficia de entrada (input) o sea como variable de control del sistema. Si $G(k) \neq 0$, la solución de (5) es $Y(k)$ creciendo geoméricamente, como el caso del ejemplo a).

Si suponemos que $G =$ constante, la solución de la ecuación homogénea será:

$$Y(k) = A [1 + b(1-a)]^k \quad A = \text{cte}$$

y una solución particular

$$Y^p(k) = M = \text{cte}$$

de acuerdo con (5) deberá ser tal que:

$$M = [1 + b(1-a)] M - b G$$

despejando resulta:

$$M = \frac{b.G}{b(1-a)} = \frac{G}{1-a}$$

por lo tanto, la solución general será:

$$Y(k) = A [1 + b(1-a)]^k + \frac{G}{1-a}$$

A partir de la condición inicial $Y(0) = Y^0$

$$Y^0 = A + \frac{G}{1-a} \quad \Rightarrow \quad A = Y^0 - \frac{G}{1-a}$$

En definitiva la solución general será

$$Y(k) = (Y^0 - \frac{G}{1-m}) (1 + b(1-m))^k + \frac{G}{1-m}$$

$Y(k)$ crecerá geométricamente y lo hará en mayor medida cuando G y m sean más pequeños y mayor sea b .

Por último, supongamos que G es de la forma

$$G(k) = s Y(k) \quad 0 < s < 1$$

entonces:

$$Y(k+1) = [1 + b(1-m)] Y(k) - b s Y(k) \quad \text{con} \quad Y(0) = Y^0$$

cuya solución general será:

$$Y(k) = Y^0 [1 + b(1-m-s)]^k$$

Formularemos una variante del modelo visto, en ecuaciones diferenciales. [6]

Las ecuaciones básicas con la notación anterior, serán ahora:

$$C(t) = C_0 e^{gt} \quad (6)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \dot{Y}(t) = b I(t) \quad (7)$$

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (8)$$

La primera ecuación, (6), establece que el consumo crecerá con una tasa g , partiendo de un valor inicial $C(0) = C_0$. En términos del planeamiento económico, la ecuación representa el objetivo del planificador. Se supone que g es un dato, pero se explorarán las soluciones para diversos valores de g .

La ecuación (7) es la ecuación de inversión de Domar, siendo como en el caso anterior, b la tasa incremental de capital-producto, menor que uno.

Sustituyendo (7) en (8):

$$\dot{Y}(t) - b Y(t) = -b C(t) \quad (9)$$

definiendo la tasa de inversión (ahorro), como

$$s = \frac{I}{Y} = \frac{Y-C}{Y}$$

de (9) $\dot{Y} = b (Y-C)$ por lo que:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{b \cdot (Y-C)}{Y} = b \cdot s \quad (10)$$

$b \cdot s$ es la tasa garantida de Harrod ([17], pág. 451), que en este modelo no se supondrá constante.

La solución general de (9), ecuación diferencial lineal de primer orden, será la suma de una solución particular Y^* , y de la solución de la ecuación homogénea $\dot{Y} - b Y = 0$

Solución homogénea:

$$Y(t) = A e^{bt} \quad A = \text{cte}$$

Solución particular:

$$Y^*(t) = \begin{cases} \frac{b C_0}{b-g} e^{gt} & \text{si } b \neq g \\ -b C_0 t e^{gt} & \text{si } b = g \end{cases}$$

Estas soluciones se obtuvieron, suponiendo que $Y^* = M \cdot e^{gt}$ en el caso $b \neq g$, y que $Y = M \cdot t \cdot e^{gt}$ si $b = g$. Reemplazando en (9) se encontraron los valores de la constante M de la solución particular.

Si la condición inicial dada es $Y(0) = Y^0 > 0$, la solución general de (9), en el caso $b \neq g$, será:

$$Y(t) = A \cdot e^{bt} + \frac{b C_0}{b-g} e^{gt}$$

$$Y(0) = A + \frac{b C_0}{b-g} = Y^0 \quad \Rightarrow \quad A = Y^0 - \frac{b C_0}{b-g}$$

Solución general:

$$Y(t) = \left(Y^0 - \frac{b C_0}{b-g} \right) e^{bt} + \frac{b \cdot C_0}{b-g} e^{gt}$$

Si $g > b$ $Y(t)$ disminuirá su valor hasta hacerse negativa. La economía no puede crear más rápido que b , por lo que un objetivo de crecimiento mayor que b no es posible.

Ejemplo f): Sistema depredador-presa

Este es un tema clásico de la ecología y estudia un sistema reducido a dos variables de estado x_1, x_2 que indican la cantidad de individuos de dos poblaciones o dos especies, por ejemplo gatos y ratones.

El estudio matemático de la dinámica de poblaciones fue realizado por Volterra en 1926 y luego por Lotka y por su estructura se extiende al estudio de otros sistemas dinámicos competitivos.

Matemáticamente es un sistema no lineal. ([4] pág. 6), que analizaremos cuantitativamente en V.1.

Si x_1 es la población de la presa y x_2 la del depredador y suponemos que $\frac{dx_1}{dt} = ax_1$ lo que significa que, en ausencia de depredadores la presa crece exponencialmente con una tasa a de crecimiento: e^{at} ,

Para los depredadores: $\frac{dx_2}{dt} = b x_1 x_2$

Suponiendo que la tasa de pérdida de la presa es proporcional al número de presas y depredadores (muerte natural y como alimento de los depredadores) y la de los depredadores solo por muerte natural, las ecuaciones dinámicas de Volterra-Lotka serán:

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = ax_1 - ax_1x_2 \\ \dot{x}_2(t) = bx_1x_2 - 2\theta x_2 \end{cases} \quad a, \alpha, b, \theta = \text{ctes} > 0$$

(El número 2 en la segunda ecuación, aparece por una conveniencia matemática).

Si hacemos una transformación de variables:

$$y_1 = \frac{b x_1}{2\theta} \quad y_2 = \frac{a x_2}{a}$$

se verificará fácilmente que la dinámica de (11) obedece como solución a la ley de conservación:

$$H = (y_1 - \log y_1) + \frac{a}{2\theta} (y_2 - \log y_2) = \text{cte.}$$

El punto $x_1^* = 2B/b$ $x_2^* = a/a$ es el único punto de equilibrio no trivial del sistema, que se obtiene igualando a cero $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$.

Si las condiciones iniciales son tales que $x_1(0) \neq x_1^*$ $x_2(0) \neq x_2^*$ las trayectorias son órbitas cerradas en las que $H = \text{cte.}$ y se las llama ciclos límites.

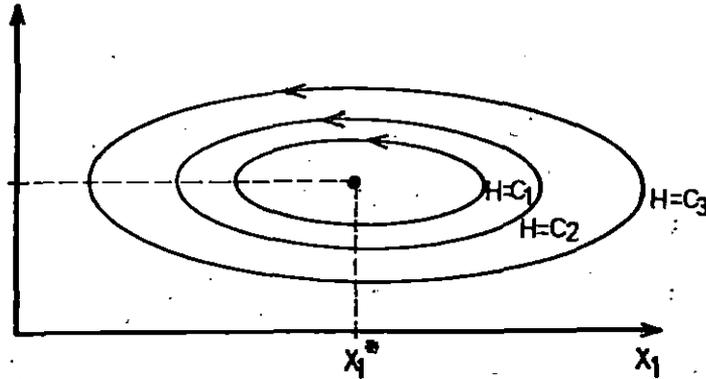


Figura 1.3

Las poblaciones de presa y depredador oscilan cíclicamente en el tiempo, salvo para el caso inicial (x_1^*, x_2^*) no permanecen constantes. La experiencia confirma este fenómeno.

Ejemplo g): Dinámica de la formación del precio del mercado

Este clásico modelo dinámico, llamado la tela de araña, lo describiremos por una ecuación en diferencias finitas de primer orden. [9] [17]

Este modelo es económicamente cuestionable ([17], pág. 87) pues al introducir la variable tiempo, las curvas de demanda y oferta pierden significado; cuando el precio es p_1 , hoy, la cantidad comprada no sería la misma si los compradores supiesen que se espera que el precio baje.

Construyamos el modelo para un solo producto, por ejemplo: maíz. La demanda del maíz, d , dependerá de su precio, p , según una función decreciente de p , $d(p)$. Supondremos:

$$d(p) = d_0 - ap \quad d_0, a > 0$$

La cantidad de maíz que ofertarán los productores, s , dependerá del precio, según una función creciente de p , la que supondremos será:

$$s(p) = s_0 + bp \quad b > 0$$

Generalmente

$$S_0 < 0$$

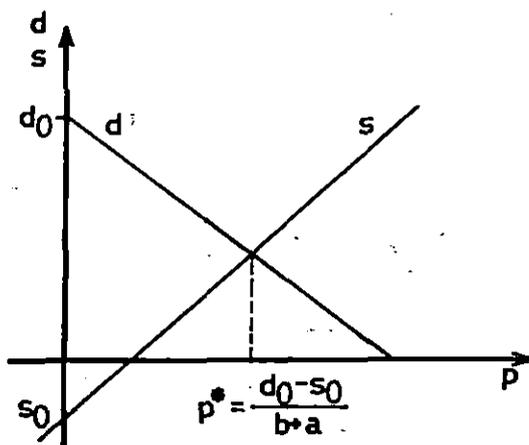


Figura I.4

En el equilibrio, la demanda deberá ser igual a la oferta

$$d_0 - a p = S_0 + b p$$

$$p^* = \frac{d_0 - S_0}{b + a}$$

Pero a este punto, en caso que se llegue, será después de una serie de ajustes, que determinaremos analizando el comportamiento dinámico del sistema.

Si en el período k , el precio es $p(k)$, el productor basará su producción en dicho precio, pero solo está disponible en el período $k+1$. Cuando esa oferta esté disponible, su precio quedará determinado por la función de demanda. Este nuevo precio es observado por los productores, que ajustarán su producción al mismo para el siguiente período.

Matemáticamente:

$$S(k+1) = S_0 + b p(k)$$

$$d(k+1) = d_0 - a p(k+1)$$

Imponiendo la condición que en el equilibrio la oferta debe ser igual a la demanda, tendremos la ecuación dinámica:

$$S_0 + b p(k) = d_0 - a p(k+1)$$

o sea:

$$p(k+1) = -\frac{b}{a} p(k) + \frac{d_0 - S_0}{a} \quad ; \quad p(0) = p_0 \quad (12)$$

el equilibrio corresponde al caso de no variación del precio, o sea

$$p(k+1) = p(k)$$

los que nos dará nuevamente:

$$p^* = \frac{d_0 - S_0}{a+b}$$

La solución general de (12), obtenida como suma de la solución de la homogénea y de una solución particular, será:

$$p(k) = [-b/a]^k p_0 + \frac{1 - [-b/a]^k}{a+b} (d_0 - S_0) \quad (13)$$

Si $b < a$, $p(k)$ converge al precio de equilibrio p^* :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(k) = p^*$$

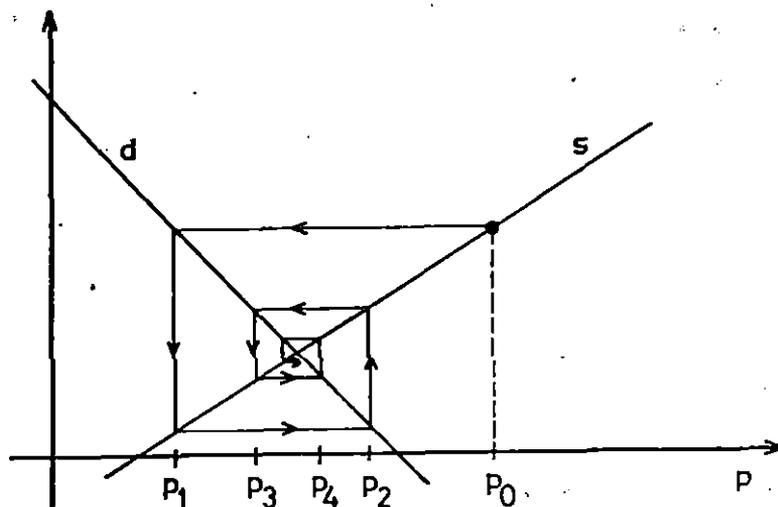


Figura 1.5

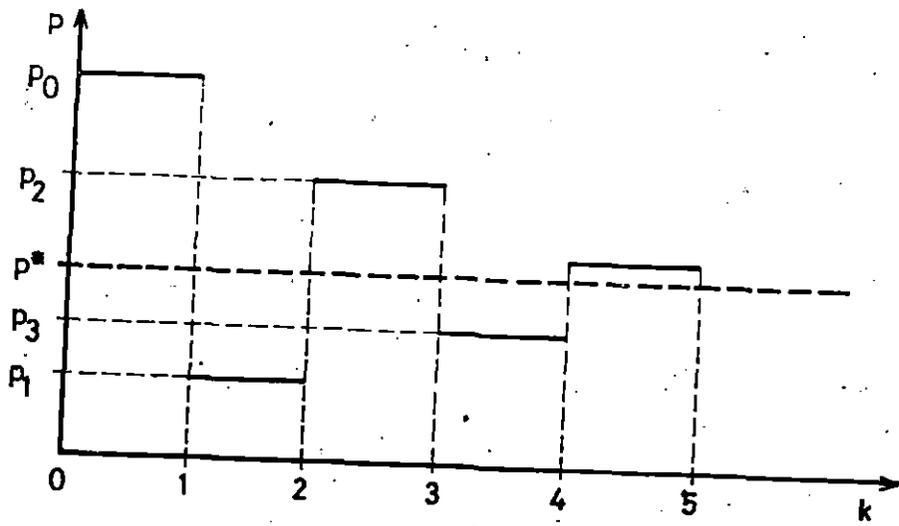


Figura 1.6

Si $b > a$ $p(k)$ diverge cuando $k \rightarrow \infty$, ver Figura 1.7

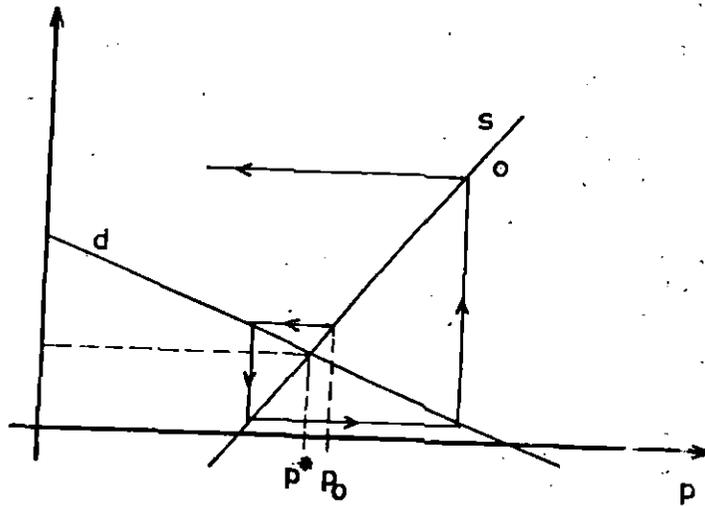


Figura 1.7

Para llegar al equilibrio, la pendiente de la curva de oferta, b , debe ser menor que la pendiente de la curva de demanda, a .

En lenguaje económico eso significa que los productores deben ser menos sensibles a los cambios de precio que los consumidores.

1.3. Espacio de estados

El concepto de espacio de estado tiene su origen en el espacio de las fases que los físicos utilizan desde el siglo pasado. El estado de una partícula que se mueve en un espacio de tres

dimensiones queda denotado con toda precisión si damos para cada instante sus coordenadas x, y, z y su velocidad. Es así que el estado de la partícula se presentará como un punto en un espacio de cuatro dimensiones.

Daremos un simple pero importante ejemplo, el movimiento oscilatorio puro o movimiento armónico. Corresponde a sistemas físicos: una masa colgada de un resorte y oscilando, las pequeñas oscilaciones de un péndulo o las de una cuerda de violín.

La ecuación correspondiente es:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0 \quad \text{con } \omega > 0 \quad (1)$$

donde x_1 es la amplitud de las oscilaciones. La solución es:

$$x_1(t) = A \text{ sen } \omega t + B \text{ cos } \omega t$$

representada en la Figura I.8

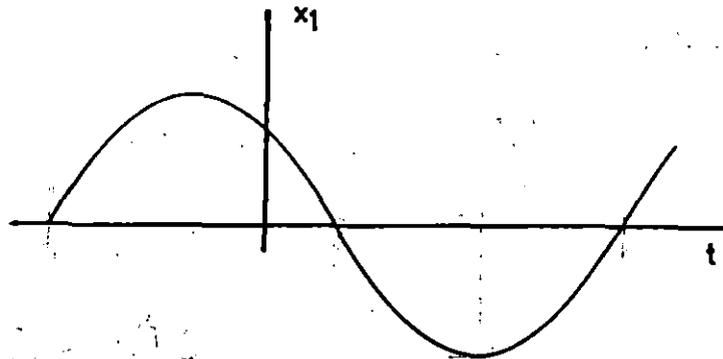


Figura I.8

Conocidas las condiciones iniciales $x_1(0)$ y $\dot{x}_1(0)$, se calcularán los valores de A y B .

Las variables de estado, o sea las que una vez conocidas nos indican con precisión el estado dinámico del sistema, son en este caso x_1 y $\dot{x}_1 = x_2$ (posición y velocidad).

La ecuación (1) se transformará en un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_1(t) \end{aligned} \quad (2)$$

con las condiciones iniciales $x_1(0)=x_1^0$; $x_2(0)=x_2^0$. Para resolver el sistema (2), dividamos la segunda ecuación para la primera

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\omega^2 \frac{x_1}{x_2}$$

cuya solución es:

$$x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = C \quad C = \text{cte} > 0$$

que corresponden a las curvas representadas en la Figura I.9

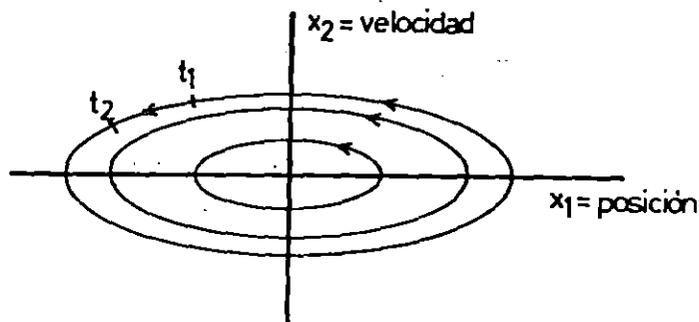


Figura I.9

El tiempo ha desaparecido en forma explícita, las flechas indican la dirección del movimiento en las trayectorias, para t creciente. Cada curva cerrada (ciclo límite), representa un movimiento oscilatorio, según las condiciones iniciales, correspondiente a la representación de la Figura I.8.

En general llamaremos Variables de Estado de un sistema dinámico, al conjunto mínimo de variables reales que describen completamente las características internas del mismo o su respuesta a los estímulos externos en un tiempo dado.

El número n de variables de estado define la dimensión u orden del sistema. Precisamente la definición, calificación y el número de variables de estado necesarias para la representación eficiente de un sistema, es una de las cuestiones importantes a resolver en el planteo del modelo.

Si denominamos $x_1(t); x_2(t); \dots; x_n(t)$ a las variables de estado de un sistema, consideraremos el vector columna

$$\underline{x}(t) = [x_1, \dots, x_n]^T$$

donde la letra T significa traspuesta y el guión bajo la letra \underline{x} indica que se trata de un vector.

El subespacio de E^n en el cual se define el rango de variación de $\underline{x}(t)$ se denomina Espacio de Estado.

Si en el espacio de dos dimensiones E^2 definimos el vector de estado

$$\underline{x}(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$$

como en el caso del ejemplo anterior, y si su dinámica está regida por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x};t)$$

o desarrollado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

sus soluciones serán líneas llamadas trayectorias que señalarán la evolución del sistema en el tiempo.

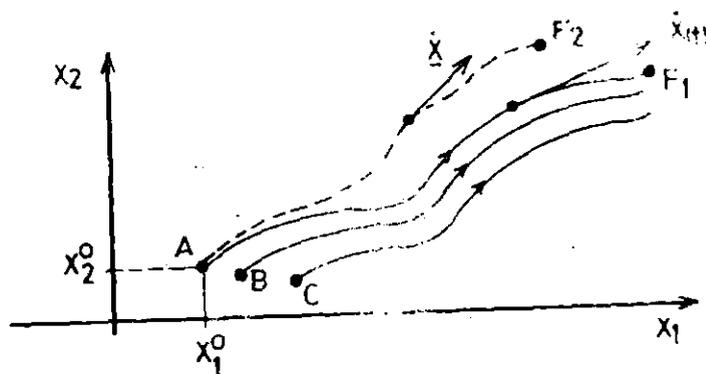


Figura I.10

La tangente geométrica en cada punto de una trayectoria es el vector

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}$$

Para distintas condiciones iniciales A , B , C tendremos trayectorias distintas pero, suficientemente "cercanas" entre sí si lo están A , B , C . La trayectoria que se inicia en A para el tiempo t_0 y llega al punto F_1 para el tiempo t_f , lo ha hecho sin ninguna acción externa, por la propia dinámica interna dictada por el sistema

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x};t)$$

Si queremos acciones sobre el sistema, controlarlo, deberemos actuar con acciones externas, una variable de control

$$\underline{U}(t) = |u_1, u_2, \dots, u_p|^T$$

con lo que la ecuación será ahora

$$\underline{X}(t) = \underline{f}(\underline{X}, \underline{U}, t)$$

Si queremos que la trayectoria iniciada en A llegue para el tiempo t_f a F_2 en lugar de F_1 , deberemos elegir el vector control $\underline{U}(t)$ adecuado.

Definiremos como CONTROL de un sistema a la actividad de organización encaminada a la consecución de fines prefijados. El proceso de control consiste en una serie de decisiones acerca de las variables de control.

Un sistema es controlable si es posible encontrar un vector $\underline{U}(t)$ que en intervalos de tiempo finito ($t_f - t_0$) transfiera el sistema desde un estado inicial caracterizado por el vector $\underline{X}_0(t)$ a un estado final caracterizado por el vector $\underline{X}_f(t)$ arbitrariamente especificado.

En general se establecen restricciones sobre las variables de control, del tipo:

$$u_{\min}(t) < u(t) < u_{\max}(t)$$

Por ejemplo, en un modelo macroeconómico, el porcentaje del PBN dedicado a la educación puede ser una variable de control que tenga límites prefijados; en un sistema eléctrico de potencia la generación de energía reactiva en una central tiene límites prefijados, el agua turbinada de un embalse, etc.

Si tratamos de representar el parque generador de un sistema eléctrico, éste quedará totalmente definido cuando se conozca para cada período la potencia instalada de cada tipo de equipamiento (nuclear, térmico, turbogas, hidroeléctrico, etc.), que constituirán precisamente las variables de estado del sistema.

Si se consideran n tipos de equipamientos posibles se definirá el vector de estado del sistema como:

$$x_i(k) = \text{potencia instalada del equipamiento de tipo } i \text{ en el período } k$$

Nuestra posible acción sobre el sistema serán las decisiones sobre incorporación o retiro de nuevas unidades de cada tipo de equipamiento. Por lo tanto las variables de control $u_i(k)$ pueden definirse como:

$$u_i(k) = \text{incremento o decremento neto de la potencia instalada del equipamiento de tipo } i \text{ producido al final del período } k.$$

En consecuencia el estado del sistema en el periodo $k+1$ está dado por:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k) \quad \forall i: 1 \leq i \leq n$$

En este caso las variables de control están acotadas inferiormente, aún cuando algunas de ellas puedan asumir valores negativos.

$$u_{i\min}(k) \leq u_i(k)$$

Por otra parte si $u_{i\min}(k)$ es negativo, se está admitiendo un posible retiro que no podrá exceder la potencia instalada en este tipo de equipamiento

$$|u_{i\min}(k)| \leq x_i(k)$$

Eventualmente existirán límites superiores a los incrementos de potencia para algunos equipamientos.

$$u_i(k) \leq u_{i\max}(k)$$

Estos límites podrán o no depender del periodo.

Es claro, a partir de su definición, que las variables de estado no pueden ser negativas.

$$x_i(k) \geq 0$$

Así el sistema queda representado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + \underline{u}(k) \\ u_{i\min}(k) \leq u_i(k) \leq u_{i\max}(k) \\ \underline{x}(k) \geq 0 \end{array} \right.$$

En general la trayectoria de estados no puede ser cualquiera, ya que en cada periodo la potencia instalada deberá ser suficiente para abastecer la demanda. Es decir:

$$\sum_{i=1}^n x_i(k) \geq D(k)$$

lo cual significa que el vector estado debe permanentemente pertenecer al hiperespacio definido por la restricción.

Se trata, entonces, de encontrar un conjunto de ecuaciones que representen los procesos que en el interior del sistema, que hacen corresponder a un conjunto de variables de entrada y de control, un determinado conjunto de variables de salida, por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t_{i+1}) = f_1(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i), u_1(t_i), \dots, u_r(t_i)) \\ \vdots \\ x_n(t_{i+1}) = f_n(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i), u_1(t_i), \dots, u_r(t_i)) \end{array} \right. \quad i=0,1,\dots,n$$

Este sistema puede ser expresado vectorialmente mediante

$$\underline{X}(t_{i+1}) = \underline{F}(\underline{X}(t_i), \underline{U}(t_i)) \quad i=0,1,\dots,n$$

Una vez planteado, el modelo deberá ser sometido a dos tipos de análisis de consistencia.

El primero de ellos, denominado CALIBRADO DEL MODELO, consiste en ajustar los parámetros de forma tal que el modelo produzca con cierta precisión la misma respuesta que se observó en el sistema real ante situaciones determinadas.

Cuanta más información se disponga sobre la relación estímulo-respuesta del sistema real tanto más fácil será el calibrado y se tendrá más seguridad sobre la bondad del modelo.

El otro análisis, llamado de SENSIBILIDAD o ESTABILIDAD, consiste en estudiar como varía la respuesta del modelo ante pequeñas modificaciones en los parámetros o variables de entrada.

En los capítulos IV y V se profundizarán estos temas.

II. MODELOS Y TECNICAS DE OPTIMIZACION ESTADICA: ASIGNACION DE RECURSOS

La formulación general de este tipo de modelos corresponde a situaciones estáticas, donde el tiempo no interviene y normalmente, en economía, significa asignar recursos limitados entre varias actividades, buscando alcanzar un objetivo determinado en forma óptima, ya sea maximizando ganancias o minimizando costos.

En el caso general se trata de determinar los valores de n variables de estado que satisfagan m restricciones:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_i \quad i=1, \dots, m$$

y tales que maximicen o minimicen la función objetivo

$$I = F(x_1, \dots, x_n)$$

Si las restricciones son de igualdad, m y n estarán matemáticamente relacionadas pues $m \leq n$, no así en caso de desigualdades donde m puede ser cualquier número real.

Si las g_i y la F son lineales en x_j , el modelo se denomina lineal y se resuelve por un algoritmo sencillo, simplex, adecuado para atacar problemas de programación lineal.

El problema planteado puede ser totalmente libre, o sea no existir restricciones g_i , con lo que las x_j serán $-\infty < x_j < \infty$.

II.1. Programación clásica, sin restricciones [8]

En el Anexo 1 se dan las condiciones de existencia de óptimos y se analizan con cierto detalle los teoremas correspondientes.

Analizando primero el caso de una sola variable independiente, el problema consiste en encontrar un valor x^* que maximice o minimice la función objetivo $F(x)$.

- x^* será un máximo (mínimo) global si hace que la función objetivo tome un valor mayor o igual (menor o igual) que para todo otro x :

$$F(x^*) \geq F(x) \quad \forall x$$

- x^* será un máximo global estricto si la función objetivo es estrictamente mayor:

$$F(x^*) > F(x) \quad \forall x$$

Por economía de lenguaje nos referiremos a máximos, sabiendo que con los cambios correspondientes, tendremos el caso de mínimos.

- x^* será un máximo local si hace que la función objetivo tome un valor mayor o igual que para cualquier otro x en un entorno de x^* suficientemente pequeño.

$$F(x^*) \geq F(x) \quad \forall x: |x-x^*| < \epsilon$$

- * x^* será máximo local estricto, si la desigualdad se da en sentido estricto

$$F(x^*) > F(x) \quad \forall x: |x-x^*| < \epsilon$$

En la Figura II.1 se grafican algunos casos.

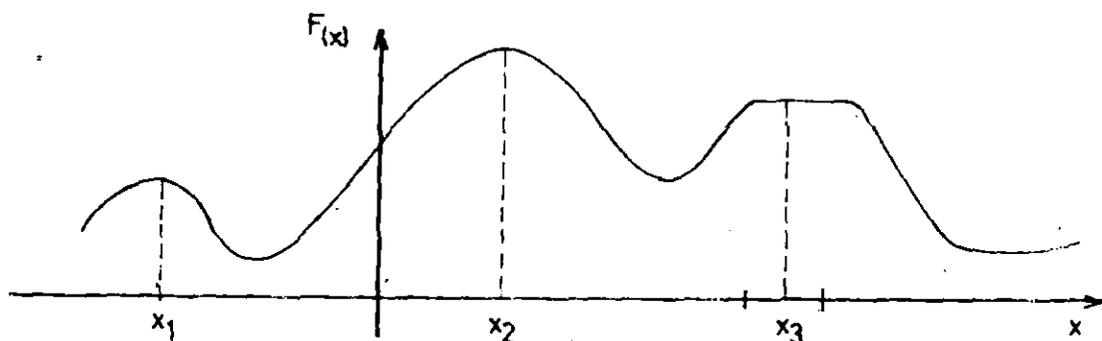


Figura II.1

x_1 es máximo local estricto; x_2 máximo global estricto; x_3 máximo local.

Las condiciones suficientes para un máximo (mínimo) local estricto (Anexo 1) en x^* , son que la primera derivada se anule y que la segunda derivada sea estrictamente negativa (positiva) en ese punto:

$$\frac{dF}{dx}(x^*) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x^*) < 0 \quad (2)$$

o sea $F(x^*) > F(x^* + \Delta x)$ siendo Δx una pequeña variación arbitraria de x , suficientemente pequeña.

Si $(d^2F/dx^2)=0$ podría tratarse de un punto de inflexión.

El caso multivariable, donde $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o vectorialmente $F(\underline{X})$ (F escalar y \underline{X} vector columna), se trata en forma análoga.

Se trata de hallar el máximo de

$$\max_{\underline{X}} F(\underline{X}) = \max_{x_1, \dots, x_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Las condiciones suficientes para un máximo local estricto en \underline{X}^* , son que \underline{X}^* sea un punto estacionario en el cual se anulan todas las derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\underline{X}^*) = 0 ; \dots ; \frac{\partial F}{\partial x_n}(\underline{X}^*) = 0$$

Recordando que el gradiente de una función escalar F en \underline{X} es el vector fila

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\underline{X}^*), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\underline{X}^*)$$

que se denota $\nabla F(\underline{X})$, la primera condición suficiente (tanto para mínimo como para máximo en \underline{X}^*) será

$$\nabla F(\underline{X}^*) = \underline{0} \quad \text{con } \underline{0} = (0, 0, \dots, 0) \quad (3)$$

La matriz Hessiana de $F(\underline{X})$ es:

$$\nabla^2 F(\underline{X}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\underline{X}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\underline{X}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{X}) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(\underline{X}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(\underline{X}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(\underline{X}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{X}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\underline{X}) & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\underline{X}) \end{vmatrix}$$

La condición suficiente de segundo orden para que F tenga un máximo local estricto en \underline{x}^* , es que la matriz Hessiana $\nabla^2 F(\underline{x}^*)$ sea definida negativa en \underline{x}^* .

Lo que significa, siendo $\Delta \underline{x}$, un incremento suficientemente pequeño de \underline{x}^* :

$$(\Delta \underline{x})^T \cdot \nabla^2 F(\underline{x}^*) \cdot \Delta \underline{x} < 0 \quad (4)$$

Si \underline{x}^* es un mínimo local estricto, es válida la condición suficiente (3) mientras que la (4) cambia por >0 pues la matriz Hessiana $\nabla^2 F(\underline{x}^*)$ debe ser definida positiva.

Nota:

Recordemos que dada una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ simétrica (como lo es $\nabla^2 F$) y un vector columna \underline{x} , la forma cuadrática de A es

$$Q = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

Q es definida negativa si $Q < 0 \forall \underline{x} \neq 0$ y definida positiva si $Q > 0 \forall \underline{x} \neq 0$.

Por último Q es definida positiva si, y sólo si, todas las raíces propias de A son positivas, o lo que es lo mismo, si todos los menores dominantes de A son positivos.

Q es definida negativa si, y sólo si, todas las raíces propias son negativas, o bien, si todos los menores principales dominantes tienen signos alternos de negativo a positivo. [8].

La condición (4) en el caso multivariable es equivalente a la condición (2) en el caso univariable. Si no se cumple (2) \underline{x}^* es un punto de inflexión y si no se cumple (4) tendremos un punto de ensilladura que para el caso de dos dimensiones se asemeja a una silla de montar, donde según una dirección tenemos un máximo y en la dirección de la otra variable, un mínimo. En el caso de n variables, de no cumplirse (4), según algunas direcciones tendremos un máximo y en las otras un mínimo.

II.2. Programación no lineal con restricciones de igualdad

Se trata del problema de encontrar un máximo o un mínimo de una función objetivo $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\underline{x})$ sujeta a restricciones del tipo

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = b_1$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = b_2$$

⋮

$$g_m(x_1, \dots, x_n) = b_m$$

en forma vectorial

$$\max_{\underline{X}} F(\underline{X}) \quad \text{sujeta a} \quad g(\underline{X}) = \underline{b} \quad (1)$$

las restricciones limitan los valores admisibles de \underline{X} a tener en cuenta para resolver este problema.

Si el caso es de n variables, tenemos n grados de libertad si no hay restricciones. Con m restricciones del tipo (1) los grados de libertad serán $(n-m)$ por lo que deberá ser $m \leq n$.

Para determinadas condiciones de las g_i (hipótesis jacobiana, ver Anexo 1) es posible explicitar m de las variables x_j y reemplazando su expresión en $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tendremos una función $G(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ de $n-m$ variables a maximizar como en el caso tratado en II.1., sin restricciones.

II.2.1. Método de los multiplicadores de Lagrange

Propuesto el problema general de la programación clásica

$$\max_{\underline{X}} F(\underline{X}) \quad \text{sujeta a} \quad g(\underline{X}) = \underline{b} \quad (1)$$

introduciremos un vector fila de m nuevas variables (una por cada restricción)

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

estas variables son llamadas multiplicadores de Lagrange.

Se supondrán las F y las g_i continuamente diferenciables.

Por el teorema de Weierstrass si X es no vacío y acotado, existe una solución.

El método de los multiplicadores de Lagrange es muy útil, no sólo por estar en la base de diversos problemas de optimización, sino por aportar como subproducto, datos valiosos sobre la sensibilidad de la solución y aportar sentido físico o económico a los nuevos parámetros λ_i que se introducen para hallar las soluciones.

Definamos la función Lagrangiana como la función objetivo más el producto interior del vector fila de los multiplicadores $\underline{\lambda}$ de Lagrange y el vector columna, diferencia entre las constantes de restricción y las funciones de restricción:

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = F(\underline{x}) + \underline{\lambda} \cdot [\underline{b} - g(\underline{x})]^T \quad (2)$$

Se deberá encontrar ahora el punto $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$ en el cual se anulan todas las derivadas parciales de primer orden de la Lagrangiana (2).

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) - \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{x}^*) = 0 \quad \forall i: 1 \leq i \leq n \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) = b_j - g_j(\underline{x}^*) = 0 \quad \forall j: 1 \leq j \leq m \quad (4)$$

las (4) son las m ecuaciones de restricción.

Las condiciones de segundo orden establecen que la matriz Hessiana de las derivadas parciales de segundo orden de la Lagrangiana con respecto a los x_i debe ser definida negativa si buscamos el máx $F(\underline{x})$, o definida positiva si buscamos el mín $F(\underline{x})$, en $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$, sujeta a las m condiciones:

$$dg = \nabla g(\underline{x}^*) \cdot d\underline{x}^T = 0$$

(Ver Anexo 1 y [8]).

Resolvamos el siguiente ejemplo:

$$\min F(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$$

$$\text{sujeta a } g(x_1, x_2) = x_1 - x_2 = 1$$

$$L = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 + \lambda(1 - x_1 + x_2)$$

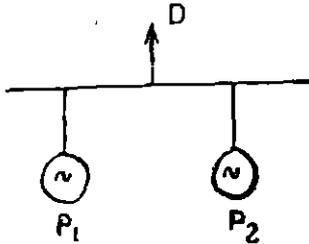
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -x_1 - 2x_2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 1$$

Las soluciones son: $x^*_1 = \frac{3}{2}$; $x^*_2 = \frac{1}{2}$; $\lambda^* = \frac{5}{2}$

II.2.2. Aplicación al despacho económico de cargas



Consideremos una central termoeléctrica con dos unidades generadoras, cada una de las cuales tiene una función de costo de combustible, F_i , creciente con las cantidades generadas. (Figura II.2).

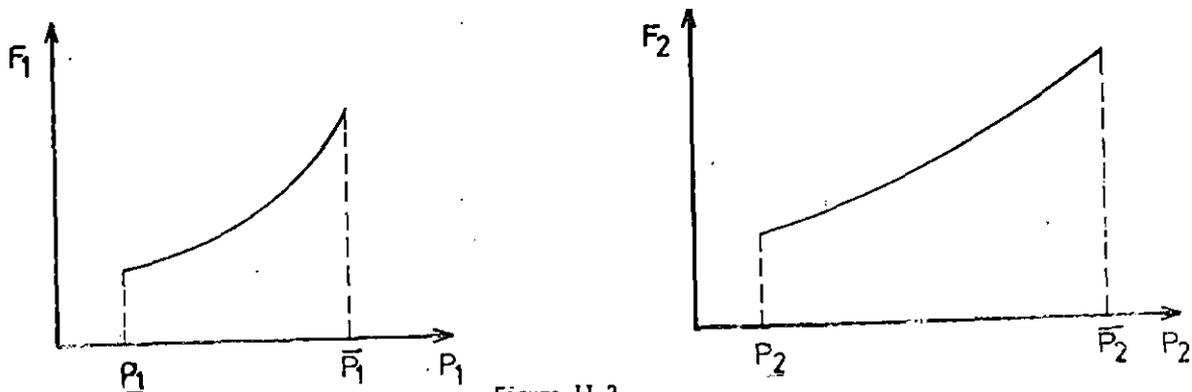


Figura II.2

En cada instante, con las dos máquinas funcionando, se debe satisfacer la demanda más las pérdidas (D), y se desea minimizar el costo total de combustible.

El problema será entonces:

$$\min G(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2)$$

Sujeta a

$$P_1 + P_2 = D$$

$$P_1 \leq P_1 \leq \bar{P}_1$$

$$P_2 \leq P_2 \leq \bar{P}_2$$

La función Lagrangiana tendrá entonces la forma:

$$L(P_1, P_2, \lambda) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + \lambda (D - P_1 - P_2)$$

Sus puntos críticos serán las soluciones de:

$$\frac{\partial L}{\partial P_1} = \frac{dF_1}{dP_1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial P_2} = \frac{dF_2}{dP_2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = D - P_1 - P_2 = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{dF_1}{dP_1} = \lambda = \frac{dF_2}{dP_2}$$

La condición de mínimo consumo es entonces la igualdad de los costos marginales, con lo que se observa que el multiplicador de Lagrange tiene un claro sentido económico.

Veamos la resolución gráfica del problema de despacho.

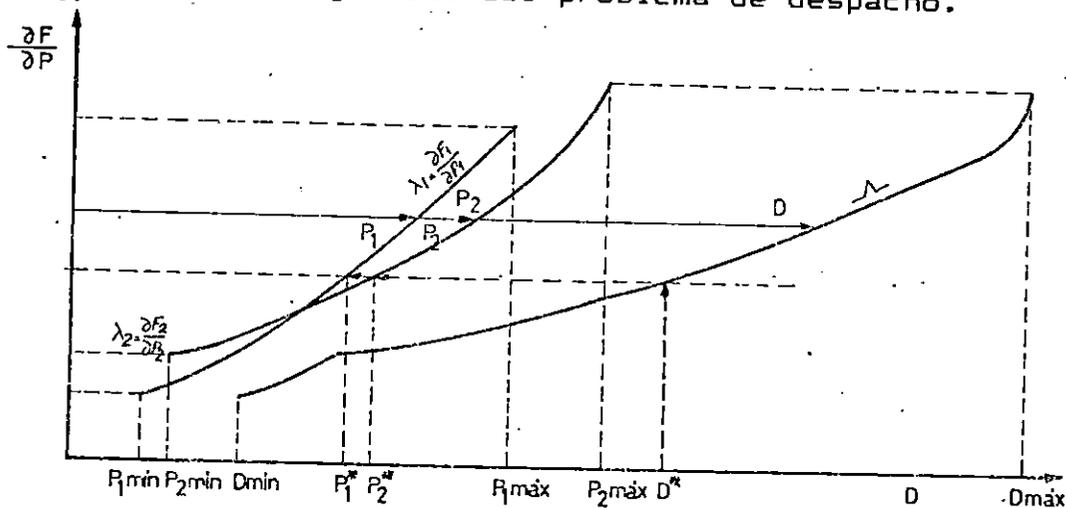


Figura II.3

Trazando una paralela al eje P , en su intersección con

$$\lambda_1 = \frac{dF_1}{dP_1} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{dF_2}{dP_2}$$

se obtienen P_1 y P_2 que garantizan un mínimo consumo.

Para la restricción del abastecimiento de la demanda D , se suman las curvas λ_1 y λ_2 en el sentido de las abscisas, obteniéndose la curva $\Omega = \Omega(D)$, tal como se hizo en la Figura II.3.

Si queremos saber para una demanda D^* , cuánto deben generar las unidades 1 y 2 para tener un mínimo consumo de combustible, se traza una paralela al eje de las ordenadas por D^* hasta cortar a la curva Ω y desde ese punto una paralela al eje de las abcisas hasta cortar las curvas λ_1 y λ_2 . Se obtendrán así P_1^* y P_2^* que por construcción satisfacen:

$$P_1^* + P_2^* = D^*$$

$$\frac{dF_1}{dP_1}(P_1^*) = \frac{dF_2}{dP_2}(P_2^*) = \Omega(D^*)$$

Nótese que las restricciones

$$P_1 < P_1 < \bar{P}_1$$

$$P_2 < P_2 < \bar{P}_2$$

que el método de Lagrange no tiene en cuenta por ser desigualdades, se incorporan en el análisis gráfico al considerar la curva Ω definida entre la suma de los mínimos y la suma de los máximos.

El método se extiende fácilmente al caso de n unidades generadoras, obteniéndose en este caso las condiciones

$$\frac{dF_1}{dP_1} = \lambda$$

.

$$\frac{dF_n}{dP_n} = \lambda$$

$$P_1 + \dots + P_n = D$$

Veamos un ejemplo numérico. Sean

$$F_1(P_1) = 1/4 P_1^2 + 3 P_1 + 5$$

$$F_2(P_2) = 1/6 P_2^2 + 4 P_2 + 7$$

Por lo tanto:

$$\frac{dF_1}{dP_1} = \lambda_1 = 1/2 P_1 + 3 \quad \text{con} \quad 2 \leq P_1 \leq 12$$

$$\frac{dF_2}{dP_2} = \lambda_2 = 1/3 P_2 + 4 \quad \text{con} \quad 3 \leq P_2 \leq 13$$

Las demandas que podrán abastecerse con ambas máquinas serán entonces:

$$5 \leq D \leq 25$$

La igualación de los costos marginales establece la condición:

$$P_1 = \frac{2}{3} P_2 + 2$$

Teniendo en cuenta el rango de variación de P_2 , resulta que las demandas que pueden despacharse con iguales costos marginales son:

$$7 \leq D = P_1 + P_2 = \frac{5}{3} P_2 + 2 \leq \frac{71}{3}$$

Dada una demanda D^* entre 7 y $71/3$, el costo marginal asociado es el mismo que el de cualquier máquina, en particular la unidad número 2, es decir:

$$D(D^*) = 1/3 P_2^* + 4 = \frac{1}{3} \frac{(D^*-2)}{5} + 4 = \frac{D^*+18}{5}$$

Si la demanda dada está entre 5 y 7, no es posible la igualación de los costos marginales, por lo tanto la solución es mantener la unidad 2 fija en $P_2 = 3$ y operar la unidad 1 al nivel (D^*-3) , en cuyo caso el costo marginal de generación será:

$$\lambda = \frac{1}{2} P_1 + 3 = \frac{1}{2} (D^*-3) + 3 = \frac{D^*+3}{2}$$

Por su parte si D^* está entre $71/3$ y 25, tampoco es posible la igualación de los costos marginales, por lo tanto la solución es fijar la potencia de la unidad 2 en $P_2=13$ y despachar con la máquina 1 (D^*-13) . Por lo tanto:

$$\lambda = \frac{1}{2} p_1 + 3 = \frac{1}{2} (D^2 - 13) + 3 = \frac{D^2 - 7}{2}$$

En consecuencia la expresión de $\Omega(D)$ es:

$$= \Omega(D) = \begin{cases} \frac{D+3}{2} & \text{si } 5 \leq D < 7 \\ \frac{D+18}{5} & \text{si } 7 \leq D < 71/3 \\ \frac{D-7}{2} & \text{si } 71/3 \leq D < 25 \end{cases}$$

Si la demanda fuera $D = 10$

$$\lambda = \frac{28}{5} = \frac{1}{2} p_1 + 3 \Rightarrow p_1 = \frac{26}{5}$$

$$\Rightarrow p_2 = 10 - \frac{26}{5} = \frac{24}{5}$$

$$F_1(p_1) + F_2(p_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{26}{5}\right)^2 + 3 \frac{26}{5} + 5 + \frac{1}{6} \left(\frac{24}{5}\right)^2 + 4 \frac{24}{5} + 7 = 57,4$$

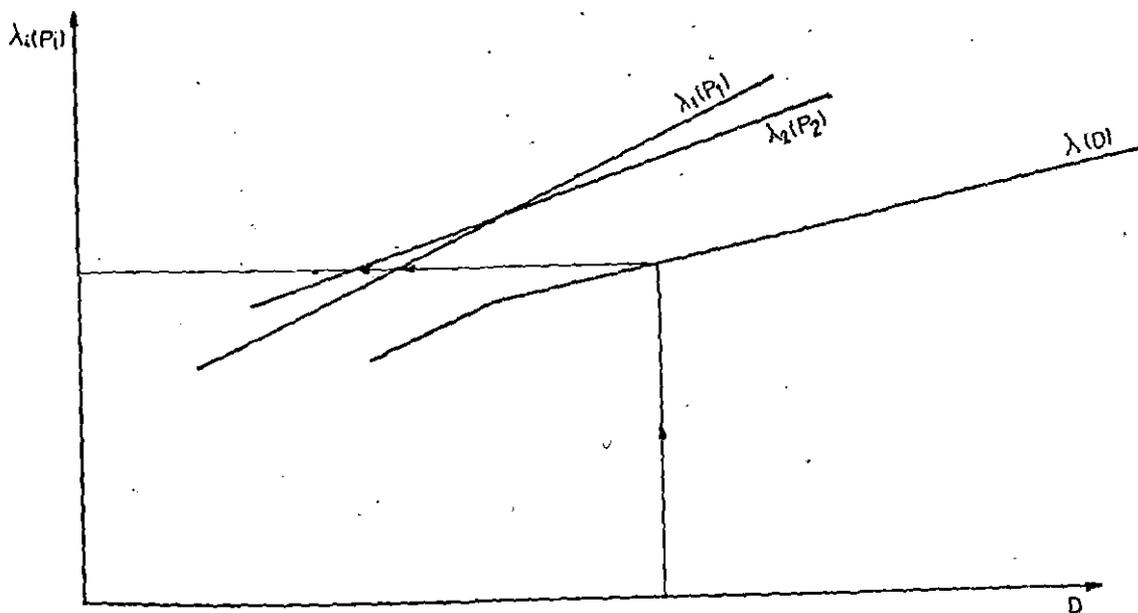


Figura II.4

El λ calculado para cada máquina representa el costo marginal de generación de dicha máquina.

Pero el λ^* óptimo, obtenido de la curva $\Omega(D)$, representa el incremento del costo total del sistema ante un incremento en la demanda D .

Si una de las unidades generadoras fuese hidroeléctrica, podrá también despacharse, si fijamos un valor al agua turbinada.

Cuando las curvas de costos $F_i(P_i)$ son de grado tres o mayor se deben analizar previamente su dF_i/dP_i pues si alguna es negativa el método no se puede aplicar pues no cumple las condiciones de segundo orden. En ese caso puede aplicarse Programación Dinámica o restringir el mínimo funcionamiento de la máquina.

11.2.3. Interpretación matemática y económica

Los valores de los multiplicadores de Lagrange, no aparecen artificialmente, ya que aportan valiosa información respecto al problema. Los multiplicadores de Lagrange correspondientes a la solución \underline{x}^* , miden el grado de sensibilidad del valor óptimo de la función objetivo $F^* = F(\underline{x}^*)$ a las variaciones en las constantes de restricción b . (Ver Figura II.5).

$$\lambda_i = \frac{\partial F^*}{\partial b_i}(\underline{x}^*) \quad i=1,2,\dots,n \quad (1)$$

Veamos un ejemplo. Sea maximizar

$$F = 16 - x_1^2 - x_2^2$$

con la restricción

$$g = x_1 + x_2 = 2$$

la lagrangiana:

$$L = 16 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda(2 - x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2 - x_1 - x_2 = 0$$

siendo las soluciones: $x^*_1=1$; $x^*_2=1$; $\lambda^*=-2$; $F^*=14$

Según la ecuación (1)

$$\frac{\partial F^*}{\partial b} = \lambda^* = 2$$

variando b en un entorno suficientemente pequeño, por ejemplo incrementando su valor en 0.1, tendremos

$$\frac{\partial F^*}{\partial b} = 2 \Rightarrow \Delta F = 2\Delta b = 2 \cdot 0,1 = 0,2$$

Según esto, variando b a $b + \Delta b = 2,1$ F^* disminuiría su valor en 0,2. Resolvamos el sistema para estas nuevas condiciones:

$$\max F = 16 - x_1^2 - x_2^2$$

$$g = x_1 + x_2 = 2,1$$

$$L = 16 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda(2,1 - x_1 - x_2)$$

con las soluciones de máximo: $x_1=1,05$ $x_2=1,05$ con lo que

$$F^* = 16 - 1,1025 - 1,1025 = 13,795$$

o sea

$$\Delta F^* = 14 - 13,795 = 0,205$$

prácticamente coincidente con el valor encontrado anteriormente.

Otro ejemplo se puede analizar en el despacho económico de cargas en II.2.2. En ese caso

$$\min G(P_1, P_2) = F_1(P_1) + F_2(P_2)$$

con la restricción

$$P_1 + P_2 = D$$

el multiplicador de Lagrange obtenido, tendrá el siguiente significado:

$$\lambda = \frac{\partial G^*}{\partial D}$$

o sea el costo marginal de combustible por la variación de demanda, valor que se ha visto, coincide con el costo marginal de cada máquina en el valor óptimo P_1^* , P_2^* .

El método de Lagrange nos proporciona entonces un análisis de sensibilidad.

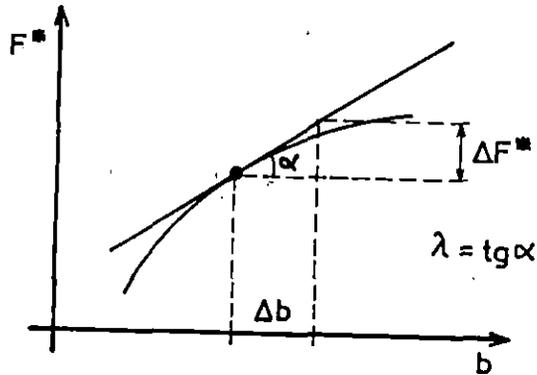


Figura II.5

Si por ejemplo fuese $\lambda_i=0$ en el punto óptimo de solución, entonces pequeños cambios en la constante de restricción b_i correspondientes al λ_i , no afectarían al valor óptimo F^* de la función objetivo. Los multiplicadores de Lagrange tienen una interpretación importante en problemas como la asignación de recursos. Cuando la función objetivo tiene las dimensiones de un valor (beneficios, ingresos, costos) y las restricciones indican la cantidad de recursos disponibles (horas hombre, horas de máquinas, cantidad de materias primas), entonces el multiplicador de Lagrange mide la sensibilidad de un valor, a los cambios en esas cantidades de recursos disponibles y, en consecuencia representa un precio, que se suele llamar pseudoprecio (shadowprices, precios sombra) del factor.

II.3. Programación no lineal con restricciones de desigualdad

El problema de la programación no lineal, consiste en encontrar valores no negativos de las variables de decisión, tal que se optimice (maximice o minimice) una función objetivo dada, sujetas sus variables a un conjunto dado de restricciones de desigualdad.

$$\underset{\underline{X}}{\text{edx}} F(\underline{X}) \quad \text{con} \quad q(\underline{X}) \leq \underline{b} \quad \underline{X} \geq 0 \quad (1)$$

donde \underline{X} vector columna $(x_1, \dots, x_n)^T$ y q función vectorial m -dimensional, o sea



$$\begin{aligned} & \text{máx } F(x_1, \dots, x_n) \quad \text{sujeta a} \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \\ & g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ & g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_n \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad \dots \quad x_n \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Se supone las F, g_1, \dots, g_n dadas y continuamente diferenciables.

El sentido de las desigualdades (\leq) es cuestión de convención, se puede cambiar su sentido multiplicando por -1 a ambos lados de la desigualdad, por ejemplo

$$2x_1 - x_2 \geq 4 \quad \text{es igual a} \quad -2x_1 + x_2 \leq -4$$

Una igualdad puede reemplazarse por dos desigualdades (\geq, \leq). Por ejemplo:

$$3x_1 - 4x_2 = b \quad \text{es equivalente a} \quad \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 \leq b \\ 3x_1 - 4x_2 \geq b \end{array} \right.$$

II.3.1. Las Condiciones de Kuhn-Tucker

Cuando las únicas restricciones son $x_i \geq 0 \quad \forall i$ y las g_i no existen (ver Anexo 1.b), un máximo local en \underline{X}^* viene determinado por las siguientes $2n+1$ condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) \leq 0 \\ & \frac{\partial F}{\partial x_i}(\underline{x}^*) x_i = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (2) \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

En el caso de una sola variable $x_1=x$, observamos en la Figura II.6.b el máximo cuando x^* , solución, es un punto interior al recinto de X admisibles $x \leq K$, siendo evidente, geoméricamente, que debe ser $dF(x^*)/dx = 0$.

En la Figura II.6.a se representa la solución máxima para $x^*=0$, donde observamos que debe ser $dF(x^*)/dx \leq 0$ (decreciente). Además, como $x^*=0$, será $dF(x^*)/dx \cdot x^* = 0$, fórmula válida

desde ya para la situación representada en II.6.b.

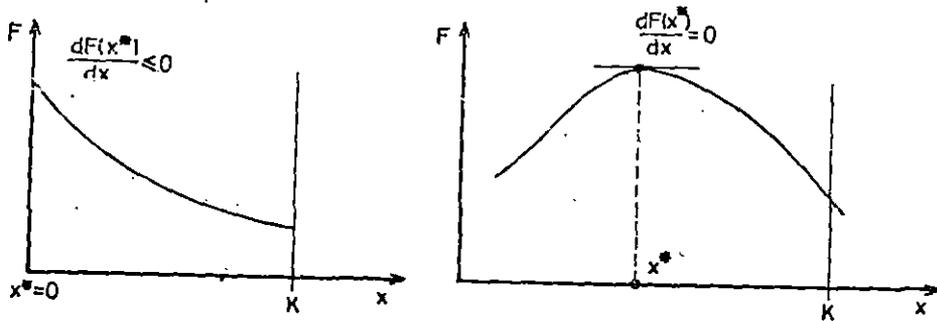


Figura II.6

En el problema general de la programación no lineal, (1), se cumplen las condiciones de Kuhn - Tucker (Anexo 1.b).

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \leq 0 \\ \lambda_j \geq 0 \end{array} \right\} \forall i: 1 \leq i \leq n$$

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right\} \cdot x_i = 0 \quad (3)$$

$$\underline{b} - \underline{q}(\underline{x}) \geq \underline{0}$$

$$\underline{\lambda} (\underline{b} - \underline{q}(\underline{x})) = \underline{0}$$

$$\underline{x} \geq \underline{0} \quad \underline{\lambda} \geq \underline{0}$$

donde según la convención adoptada, el guiñon inferior indica que se trata de una magnitud vectorial y $\underline{0}$ es el vector columna, nulo.

Las ecuaciones (3) se obtienen formalmente definiendo la función lagrangiana:

$$L = F(\underline{x}) + \underline{\lambda} (\underline{b} - \underline{q}(\underline{x}))^T$$

Estas condiciones son necesarias y suficientes para un máximo local (estricto), si la función objetivo es cóncava (estrictamente) y las funciones de restricción son convexas.



Estas condiciones (3) caracterizan una solución y por tanto son muy útiles, pero generalmente no proporcionan un método constructivo para poder obtenerla.

Veremos un ejemplo muy simple:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & F = x_1 x_2 \\ \text{con} \quad & \{x_1, x_2\} \end{aligned}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$L = x_1 x_2 + \lambda (1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$dV = dW' + dW''$$

aplicando (3):

$$\rightarrow x_2 - 2x_1 \lambda \leq 0 \quad (4)$$

$$\leftarrow x_1 - 2x_2 \lambda \leq 0 \quad (5)$$

$$\rightarrow x_1 x_2 - 2x_1^2 \lambda + x_1 x_2 - 2x_2^2 \lambda = 0 \quad (6) \checkmark$$

$$\leftarrow \lambda (1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (7)$$

$$\rightarrow x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad (8)$$

de (7):

$$\leftarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$(x_2 - 2x_1 \lambda) x_1 = x_1 x_2 - 2x_1^2 \lambda$$

$$(x_1 - 2x_2 \lambda) x_2 = x_1 x_2 - 2x_2^2 \lambda$$

por lo que la solución estará sobre esta circunferencia de radio 1 (Figura II.7).

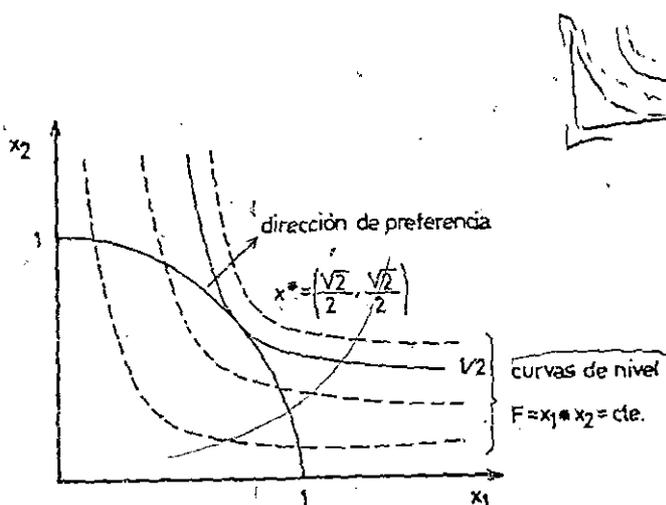


Figura II.7

Geoméricamente podemos resolver este caso encontrando el punto de tangencia de la circunferencia con una hipérbola de la familia $x_1 x_2 = cte$

$$F^* = (1/2) \cdot (1/2) = 1/2$$

se obtiene fácilmente de (6) que $\lambda^* = 1/2$ y podremos verificar que en este caso con restricciones de desigualdad, también

$$\lambda = \frac{\partial F^*}{\partial b} (x^*)$$

II.4. Programación Lineal

La programación lineal está vinculada con la resolución de aquellos problemas en los cuales las relaciones entre las variables son lineales, tanto en la función objetivo como en las restricciones.

La linealidad está caracterizada por ciertas propiedades de aditividad y multiplicación.

La aditividad significa, por ejemplo, que si necesitamos t_1 horas de máquina para producir el bien 1 y t_2 horas de máquina para producir el bien 2, el tiempo total de máquina necesario para producir ambos bienes será $t_1 + t_2$. En este caso la propiedad aditiva es razonable si el tiempo requerido para pasar de la producción del bien 1 al 2 es despreciable. Sin embargo no todos los procesos físicos se comportan de esta manera. Matemáticamente esta característica aditiva se expresa de la siguiente forma:

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$

La propiedad multiplicativa significa, por ejemplo, que si la producción de una unidad de un bien requiere λ horas de máquina, la producción de x unidades requerirá un tiempo λx . Se ve con claridad que esta condición es bastante restrictiva y que no se cumple por ejemplo al analizar los costos de producción de un bien si el proceso tiene un costo fijo importante.

Esta condición la podemos expresar formalmente como:

$$L(\lambda x) = \lambda L(x)$$

Cuando una función satisface estas dos condiciones se dice que es lineal.

Una forma lineal en n variables tiene la siguiente expresión:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

Por lo tanto el planteo general del problema de programación lineal es: Optimizar

$$F(\underline{X}) = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$$

sujeta a:

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

.

.

.

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

y su expresión matricial es:

$$F(\underline{X}) = \langle \underline{C}, \underline{X} \rangle \quad \text{a optimizar}$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} A\underline{X} \leq \underline{b} \\ \underline{X} \geq \underline{0} \end{cases}$$

donde A es la matriz de los coeficientes a_{ij} y \underline{C} y \underline{b} son vectores constantes conocidos.

Eventualmente en la función objetivo puede adicionarse un término constante.

Este planteo general admite también restricciones de desigualdad de mayor e igual e incluso igualdades. En el primer caso alcanza con multiplicar la restricción por (-1) y en el segundo reemplazar la igualdad por dos restricciones de menor e igual, vale decir

$$g(\underline{X}) \geq b \quad \Rightarrow \quad -g(\underline{X}) \leq (-b)$$

$$g(\underline{X}) = b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g(\underline{X}) \leq b \\ -g(\underline{X}) \leq (-b) \end{cases}$$

Un vector \underline{X} que satisface las restricciones

$$A\underline{X} \leq \underline{b}$$

es una solución del problema, y será una solución factible en la medida que sea no negativa.

II.4.1. Definiciones fundamentales. Convexidad

Consideremos el problema general de la programación lineal (L.P.):

$$\begin{aligned} \text{máx } F(\underline{X}) &= C_1 x_1 + \dots + C_n x_n \\ x_1, \dots, x_n \end{aligned} \quad (1)$$

sujeta las restricciones:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

cuando se plantea la minimización de $F(\underline{X})$ las desigualdades son del tipo \geq .

La P.L. es un caso especial del problema visto en II.3., de la programación no lineal. En este caso son lineales en las variables de decisión x_i , tanto la función objetivo (1) como las funciones de restricción (2).

En el espacio euclidiano E^n de las x_i , (espacio de las decisiones), $x_i \geq 0$ define un semiespacio cerrado y la intersección de los n semiespacios $x_i \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$, es el ortante no negativo de E^n .

Cada una de las desigualdades (2), define también un semiespacio cerrado formado por el conjunto de puntos de un lado del plano

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots + a_{jn} x_n = b_j$$

En general, la intersección de todos estos semiespacios cerrados de E^n , es un conjunto poliédrico convexo, o, si está acotado, un poliedro convexo.

El conjunto de todos los vectores de decisión $\underline{X}=(x_1, \dots, x_n)^T$, (T significa traspuesta por ser en realidad \underline{X} vector columna), que satisfacen las $m+n$ restricciones (2), es un conjunto poliédrico convexo cerrado, en el ortante no negativo del espacio E^n .

Un conjunto C es convexo si, y sólo si, dados dos puntos cualesquiera A y B del conjunto, todos los puntos del segmento que los une pertenecen también al conjunto C .



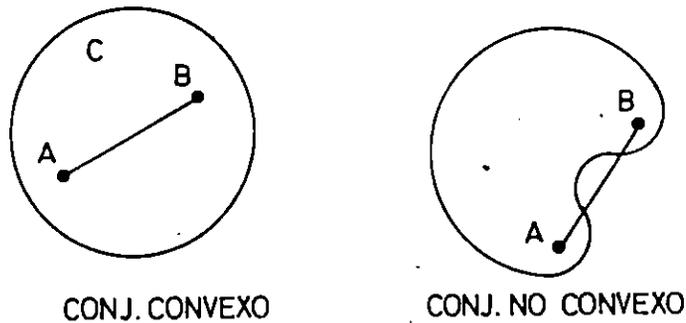


Figura II.8

Un subconjunto S de un espacio vectorial es convexo si y sólo si, dados dos puntos cualesquiera $\underline{X}, \underline{Y} \in S$, entonces:

$$a\underline{X} + (1-a)\underline{Y} \in S \quad \forall a: 0 \leq a \leq 1$$

Son ejemplos de conjuntos convexos el espacio euclidiano E^n , un hiperplano y un semiespacio de E^n .

Si dos conjuntos C_1 y C_2 son convexos, su intersección $C_1 \cap C_2$ es convexa. Su unión $C_1 \cup C_2$ no es necesariamente convexa. Por ello, la intersección de un número finito de semiespacios cerrados es convexa y se llama conjunto convexo poliédrico.

Una función de valores reales $f(\underline{X})$, definida sobre el conjunto convexo C , es convexa si y sólo si, dados dos puntos distintos cualesquiera $\underline{X}, \underline{Y} \in C$:

$$f(a\underline{X} + (1-a)\underline{Y}) \leq a.f(\underline{X}) + (1-a).f(\underline{Y}) \quad \forall a: 0 \leq a \leq 1$$

La función $f(\underline{X})$ es cóncava si, y sólo si, $-f(\underline{X})$ es convexa.

Geométricamente, en el E^2 , una función es convexa, si y sólo si el segmento que une dos puntos cualesquiera, no está por debajo de la curva que representa la función (Figura II.9).

Una función lineal es convexa y cóncava.

En el Punto II.4.2. veremos la importancia de estos conceptos aplicados a la existencia y a la búsqueda de los óptimos en la P.L. (Ver Anexo 1.a).

Las restricciones (2) de desigualdad, se pueden convertir en igualdades, introduciendo en el problema m variables auxiliares de holgura (slack), $s_i \geq 0$.

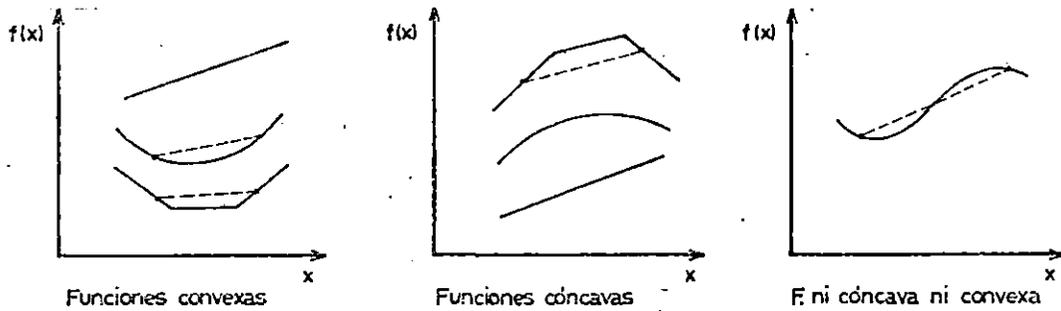


Figura II.9

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + s_1 &= b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n + s_m &= b_m \\
 x_i \geq 0 \quad s_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

- Un vector $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n, s_1, \dots, s_m)$ se llamará solución básica admisible del conjunto de restricciones definido por (3), si, y sólo si: 1) es admisible (satisface (3)) y 2) contiene como máximo m elementos no nulos, que se llaman variables básicas. Las restantes n variables, cuyo valor es cero, se llaman variables no básicas.
- Una solución básica admisible \underline{X} , se dice no degenerada, si contiene exactamente m elementos no nulos.
- Un vector \underline{X} se dice que es un punto extremo del conjunto de restricción definido por (3), si, y sólo si, es una solución básica admisible del mismo.

El problema de P.L., consiste en elegir del conjunto de soluciones admisibles, una solución que maximice el funcional $F(\underline{X}) = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$.

- Se dirá que \underline{X} es un punto extremo (vértice) del conjunto de restricciones definido por (3), si, y sólo si, \underline{X} es una solución básica admisible.

II.4.2. Planteo del problema de P.L. - Algoritmo de solución

La P.L. tuvo su origen al buscar las alternativas más ventajosas en problemas de producción y de planeamiento.

Estos problemas se caracterizan por presentar una gran cantidad de condiciones que limitan los valores en juego de las variables y la definición de una función objetivo que depende de aquellas variables. El valor de esta función, generalmente un costo o un ingreso, es el que se optimiza.

Veamos en un caso clásico de asignación de recursos, como se plantea la P.L. Para fabricar n productos distintos o realizar n procesos tecnológicos diferentes T_1, T_2, \dots, T_n , se necesitan m tipos de recursos S_1, S_2, \dots, S_m , por ejemplo materias primas, combustibles, máquinas herramientas, mano de obra, etc. Las disponibilidades de estos recursos o reservas son limitadas e iguales a b_1, b_2, \dots, b_m . Se conoce así mismo el consumo de recursos por unidad de producción en cada proceso: a_{ij} es el consumo de S_i por unidad de T_j , o sea los coeficientes técnicos de transformación de los recursos i en los productos j .

Llamando C_j al ingreso debido a la venta de una unidad de producción T_j , se requiere maximizar el ingreso total.

Representamos lo anterior en un cuadro:

Tipo de recursos	Gasto de recursos por unidad de producción					Reservas de recursos
	T1	T2	T3	...	Tn	
S_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}	b_2
.....
S_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mn}	b_m
Ingresos por unid. de prod.	C_1	C_2	C_3	...	C_n	

Designando con x_j el número de unidades de producción del tipo T_j , se expresará en fórmulas:

$$\text{máx } F(x_1, \dots, x_n) = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = \langle C, X \rangle \quad (4)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\langle ., . \rangle$ indica producto escalar, vector fila por vector columna.

Cada una de las m ecuaciones de (5) representa en el espacio de n dimensiones un semiespacio cerrado y la intersección de esos m semiespacios es un poliedro convexo. En los puntos del espacio en que cada una de las restricciones (5) de desigualdad se satisface como igualdad, y en las $x_i=0$, tendremos una cara límite. Los encuentros de las caras límites nos dan aristas y vértices.

Las curvas de nivel de la función objetivo son las:

$$C_1 x_1 + \dots + C_n x_n = \text{cte}$$

ecuación de un hiperplano en E^n .

La dirección de preferencia o dirección del mayor incremento de la $F(\underline{X})$, está dada por el vector gradiente:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = (C_1, \dots, C_n)$$

vector fila $\underline{C} \in E^n$ que es ortogonal a todas las curvas de nivel que atraviesa.

Veremos un problema muy simplificado, de modo de poder representarlo geoméricamente en el plano.

En una central termoeléctrica se deben entregar durante una hora D kWh con dos generadores que tomarán x_1 y x_2 kWh respectivamente. Las limitaciones de generación son los mínimos y máximos técnicos de cada generador: \underline{P}_i y \bar{P}_i $i = 1, 2$.

El costo de generación es C_1 y C_2 por unidad de producción.

Se trata de minimizar el costo total de generación.

En fórmulas:

$$\min F(x_1, x_2) = C_1 x_1 + C_2 x_2 = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 = D$$

$$x_1 \geq \underline{P}_1$$

$$x_2 \geq \underline{P}_2$$

$$x_1 \leq \bar{P}_1$$

$$x_2 \leq \bar{P}_2$$

(6)

Como ejemplo indicamos que si se desea tener los mismos sentidos de las desigualdades, las dos últimas restricciones se pueden transformar en

$$-x_1 \geq -\bar{P}_1 ; -x_2 \geq -\bar{P}_2$$

Representemos en el plano (x_1, x_2) , siendo $\underline{P}_1=2$; $\bar{P}_1=10$; $\underline{P}_2=3$; $\bar{P}_2=12$; $D=17$. Ver Figura II.10

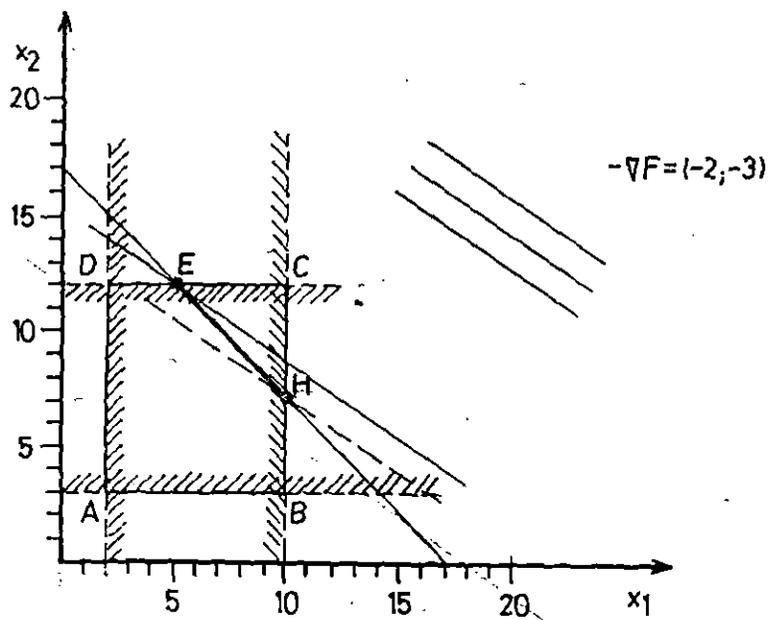


Figura II.10

La intersección de los semiplanos correspondientes a las restricciones (puntos comunes), es el segmento EH, o sea representa geoméricamente el conjunto de los vectores (x_1, x_2) admisibles.

La dirección de preferencia de la F es el gradiente con signo negativo, ya que se busca un mínimo:

$$-\nabla F = - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (-2, -3)$$

que es ortogonal a las curvas de nivel $F = 2x_1 + 3x_2 = \text{cte.}$

La curva de nivel que minimiza F, es la que pasa por el punto H de coordenadas $x_1^*=10$; $x_2^*=7$ y el valor de $F^* = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 41$.

Gráficamente se ve que si F fuese $F=3x_1+2x_2$ la solución óptima sería el punto $E=(5,12)$ con $F^*=39$ y que si F fuese $F=2x_1+2x_2$ todo el segmento EH sería solución, con el valor óptimo $F^*=34$ para todo punto de EH.

Veamos un ejercicio puramente matemático, al que sin embargo podría dársele una interpretación económica:

$$\max F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

con las restricciones:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \leq 5 & (a) \\ x_2 & \leq 5 & (b) \\ x_1 + 2x_2 & \leq 12 & (c) \\ 2x_1 + x_2 & \leq 12 & (d) \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & (e) \end{array} \quad (7)$$

Podría ser un caso de asignación de recursos, donde cinco insumos están limitados y se pide conocer la cantidad a fabricar de dos productos x_1 , x_2 en modo de maximizar el ingreso $F(x_1, x_2)$.

Gráficamente:

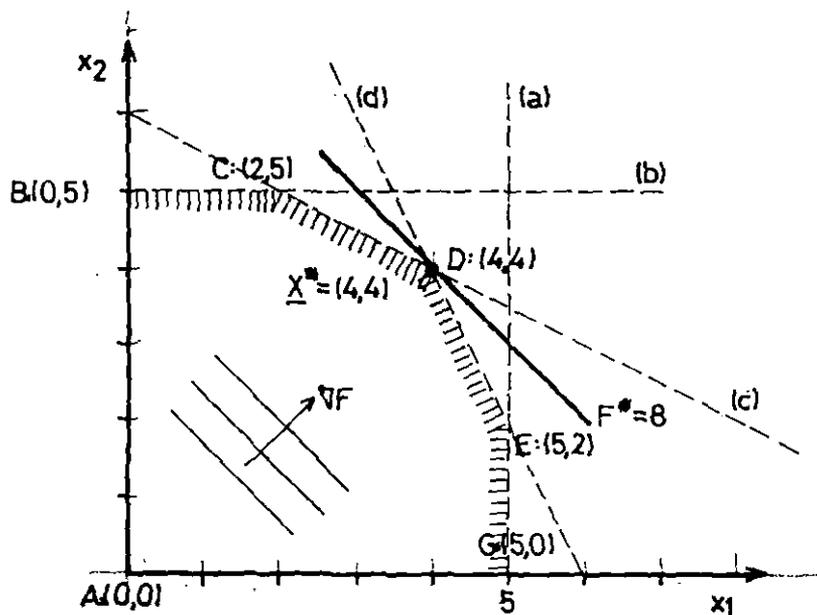


Figura II.11

En la figura se ve como se obtiene geoméricamente la solución $\underline{x}^* = (4,4)$, buscando la curva de nivel, que según ∇F , tome el mayor valor compatible con (7), obteniéndose la solución en el vértice D de dicho recinto: $F^* = 4 + 4 = 8$.

Algoritmo de solución

Algoritmo es todo conjunto de reglas que definen un procedimiento de cálculo que a partir de ciertos datos iniciales obtiene un resultado determinado.

En la P.L. el algoritmo más utilizado, en diversas variantes, es el de Dantzig o Simplex, que es un método algebraico iterativo.

En la P.L. cobran especial relevancia dos teoremas fundamentales que aseguran la existencia de extremos de determinadas funciones (Anexo 1). El teorema de Weierstrass nos asegura que si el conjunto C de valores de \underline{X} admisibles es compacto (cerrado y acotado) y no vacío y la función objetivo $F(\underline{X})$ es continua en \underline{X} , entonces $F(\underline{X})$ tiene un máximo global, o bien en el interior o en el contorno de C (condición suficiente). En el caso de la P.L., la $F(\underline{X})$ es obviamente continua y las condiciones de este teorema se cumplen con la sola condición que el conjunto C sea no vacío y acotado.

El segundo teorema fundamental, el teorema local-global, da como condiciones suficientes para que un máximo local sea un máximo global, que C sea no vacío, compacto y convexo y que $F(\underline{X})$ sea una función continua cóncava respecto a C .

Recordando que las funciones lineales son cóncavas (y convexas) y que el conjunto C de \underline{X} admisibles es un poliedro convexo, surge como importantísimo resultado para la P.L. que si el conjunto C tiene por lo menos un punto y es acotado, entonces existe un máximo local que además siempre es global.

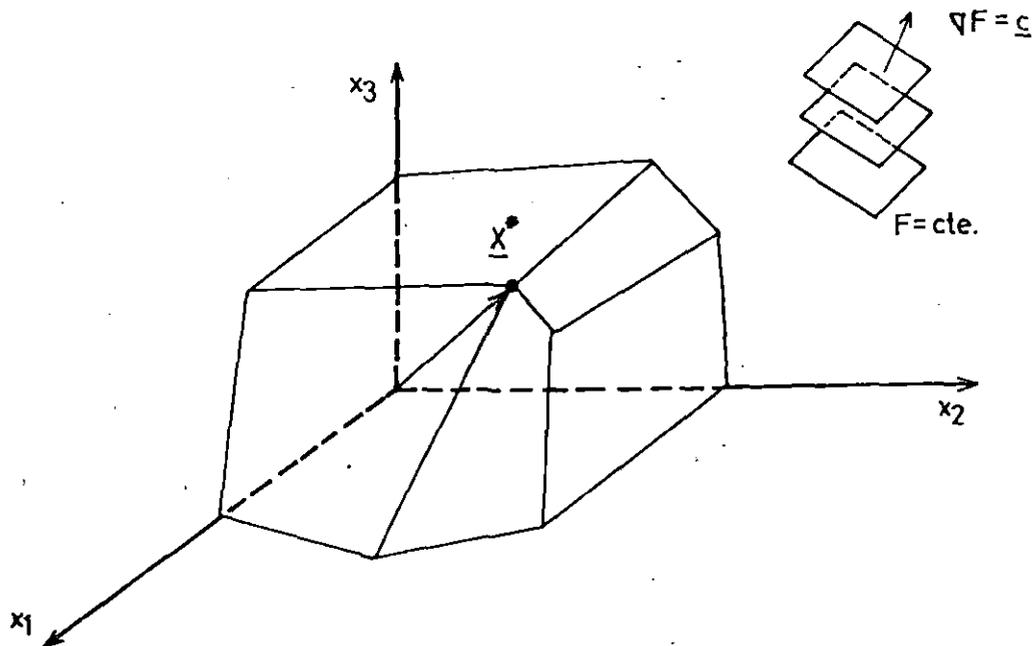


Figura II.12

Geoméricamente, el problema de P.L. consiste en hallar un punto en el espacio E^n , que esté sobre la curva de nivel más alejada en la dirección del gradiente de F , ∇F , pero dentro o tangente al poliedro convexo C de \underline{X} admisibles. Es geoméricamente intuitivo, que la solución no puede estar en un punto interior, sino en la frontera de C , o sea en un vértice o varios y por lo tanto en ese caso en su combinación lineal, aristas o caras (Ver Figura II.12).



La solución puede no ser única pero el valor óptimo de la función objetivo $F^*(X^*)$ será único.

Basándose en los teoremas anteriores, el método simplex procede del siguiente modo: Elegido un vértice cualquiera del poliedro convexo admisible, se calcula el valor de F y se lo compara con el valor de F en todos los vértices adyacentes. Si en algún vértice el valor de F es mayor (menor si buscamos un mínimo de F), se lo compara nuevamente con los valores de F en vértices adyacentes. Este proceso se prosigue hasta que se encuentra un vértice en que F es mayor que en todos los vértices adyacentes, o sea un máximo local. Por lo tanto también es un máximo global y no hace falta seguir la búsqueda. Si fuese igual el valor de F al de otro vértice, todos los puntos de ese segmento serán solución del problema de P.L.

Agregamos que si $n > m$ en (4) y (5), entonces existirá un vértice en cuyas soluciones $(n-m)$ o más de las variables de decisión son iguales a cero; es decir, existe al menos una solución que tiene a lo sumo tantas variables no nulas, como restricciones de desigualdad.

Recordemos que hay dos casos en los cuales no hay solución al problema de P.L.: 1) cuando las restricciones son incompatibles y por tanto el conjunto de oportunidades es vacío (ej. $x \leq -1$ $x \geq 0$) o cuando el conjunto de los X admisibles no es acotado (ej. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \geq 10$).

Por último veamos el ejercicio de la fórmula (7) que fue resuelto geoméricamente. Apliquemos gráficamente un algoritmo tipo simplex. Comencemos con el vértice $A=(0,0)$ donde la $F_A=0$ y en los vértices adyacentes B y G donde las F respectivas valdrán $F_B(0,5)=5$ $F_G(5,0)=5$. Elegimos cualquiera, por ej. G $F_E(5,2)=7$ y $F_A(0,0)=0$. Nos corremos a E , $F_D(4,4)=8$ $F_G(5,0)=5$. Se elige el punto D y vemos que en los vértices adyacentes C y E , la F toma los valores: $F_C(2,5)=7$ $F_E(5,2)=7$. Por tanto tenemos un máximo local en el punto $D^*=(4,4)$ con $F^*(4,4)=4+4=8$, máximo que por otra parte es global.

En los casos de dimensión mayor a 2, las restricciones (5) se transforman previamente en igualdades, introduciendo m variables auxiliares de holgura (slack), mayor que cero:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &= b_m \end{aligned} \quad (5')$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n+m$$

El algoritmo del simplex parte de una solución básica admisible, geoméricamente representada por un vértice del poliedro convexo.

Generalmente se toma el origen, cuando es admisible, $x_1=0$ $x_2=0$... $x_n=0$ y las variables de holgura igual a las constantes de restricción: $x_{n+1}=b_1$ $x_{n+2}=b_2$... $x_{n+m}=b_m$.

Los pasos siguientes consisten en calcular el valor de la $F()$ y moverse luego al vértice vecino que tenga el mayor valor de F . Matemáticamente ello significa analizar para cada una de las variables no básicas, en cuanto se las puede incrementar, sin dejar de satisfacer las restricciones, y en cuanto se incrementa la función objetivo. Desplazándose según el incremento mayor de la F , una variable pasa a ser básica y otra deja de serlo, o sea se ha pasado a otro vértice. Este proceso, guiado generalmente por un algoritmo de solución de (S'), como Gauss-Jordan, se continúa hasta que la F no se incrementa al pasar a un vértice vecino, esa será la solución del problema de P.L.

Resolveremos un ejemplo elemental

$$\begin{aligned} \max F &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 &\leq 20 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_3 &\leq 15 \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 &\geq 0 \quad x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

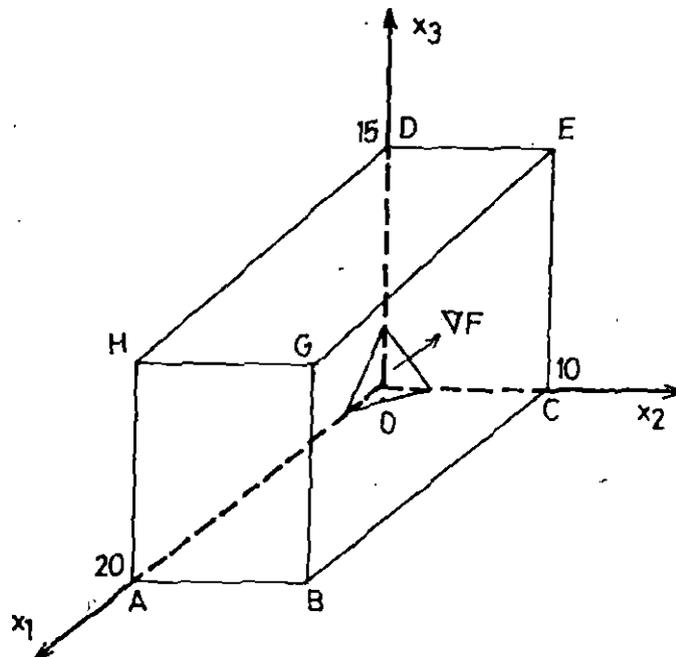


Figura II.13

Si partimos del vértice $O=(0,0,0)$ los vértices adyacentes darán: $F_A=20+0+0=20$ $F_C=0+10+0=10$ $F_D=0+0+15=15$.

Nos corremos al vértice A. Los adyacentes, no explorados aún, son el H y el B, y en ellos: $F_B=(20+10+0)=30$ $F_H=20+0+15=35$

Pasamos al vértice H; sus adyacentes son D y G: $F_D=0+0+15=15$ $F_G=20+10+15=45$

G es la solución óptima: $x_1^*=20$ $x_2^*=10$ $x_3^*=15$ y $F^*=45$.

II.4.3. Dualidad. Interpretación de las variables duales

Es sumamente interesante, por su significado técnico y sus aplicaciones prácticas, el hecho que a cada problema de programación lineal, corresponde un programa dual.

Los aspectos teóricos fundamentales, se dan en el Anexo 5, planteando en este punto la dualidad desde un punto de vista formal y con ejemplos que nos permitan visualizar los conceptos más importantes.

El problema original, llamado primal o primario, es el problema del máximo de la P.L.

$$\max F(\underline{x}) = \langle \underline{c}, \underline{x} \rangle$$

\underline{x}

sujeta a

$$\begin{aligned} A\underline{x} &\leq \underline{b} \\ \underline{x} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

con \underline{x} , \underline{b} vectores columna

en este caso el problema dual, es el problema del mínimo: ✓

$$\min G(\underline{y}) = \langle \underline{b}, \underline{y} \rangle$$

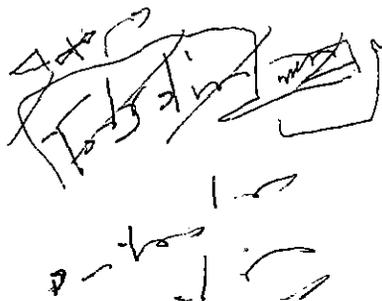
\underline{y}

sujeta a

$$\begin{aligned} \underline{y}A &\geq \underline{c} \\ \underline{y} &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

con \underline{y} , \underline{c} vectores fila

desarrollando, ambos problemas será:



primario

$$\text{máx } F = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$$

sujeta a

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m \\ x_1 &\geq 0 \quad \dots \quad x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (1')$$

dual

$$\text{mín } G = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

sujeta a

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + \dots + a_{n1} y_n &\geq C_1 \\ a_{12} y_1 + \dots + a_{n2} y_n &\geq C_2 \\ &\vdots \\ a_{1n} y_1 + \dots + a_{nn} y_n &\geq C_n \\ y_1 &\geq 0 \quad \dots \quad y_m &\geq 0 \end{aligned} \quad (2')$$

el vector $\underline{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ es columna, n-dimensional
el vector $\underline{Y} = (y_1, \dots, y_m)$ es fila, m-dimensional

Veamos un ejemplo

primario

$$\text{máx } F = x_1 + x_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2 x_2 &\leq 12 \\ 2 x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

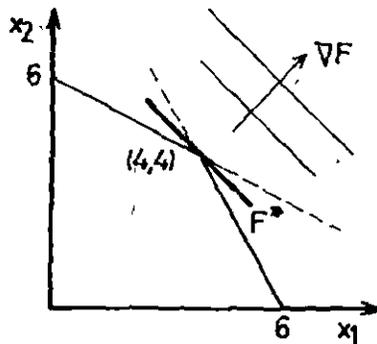


Figura 11.14

dual

$$\min G = 12 y_1 + 12 y_2$$

sujeta a

$$\begin{aligned} y_1 + 2 y_2 &\geq 1 \\ 2 y_1 + y_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$$

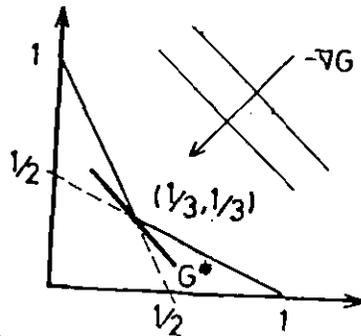


Figura II.15

El óptimo del primario es $x_1^* = 4$ $x_2^* = 4$ y el valor de la función objetivo $F^* = 4 + 4 = 8$

El óptimo del dual es $y_1^* = 1/3$ $y_2^* = 1/3$ y el valor óptimo del funcional: $G^* = 12(1/3) + 12(1/3) = 8$. Vemos que $F^* = G^*$

Otro ejemplo en tres dimensiones:

primario

$$\max F = x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 10$$

$$x_3 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0$$

dual

$$\min G = 20 y_1 + 10 y_2 + 15 y_3$$

$$y_1 \geq 1$$

$$y_2 \geq -1$$

$$y_3 \geq 1$$

$$y_1 \geq 0 ; y_2 \geq 0 ; y_3 \geq 0$$

ya que

$$\max F = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \leq b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \leq b_3$$

$$\min G = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 \geq C_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \geq C_2$$

$$a_{13} y_1 + a_{23} y_2 + a_{33} y_3 \geq C_3$$

\Rightarrow

Resolviendo geoméricamente o por simplex:

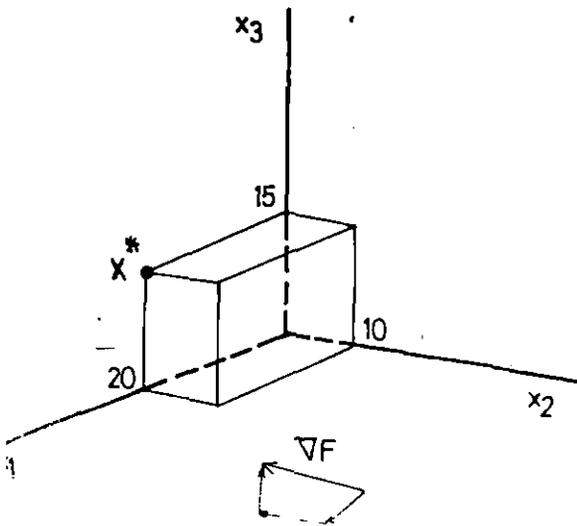


Figura II.16

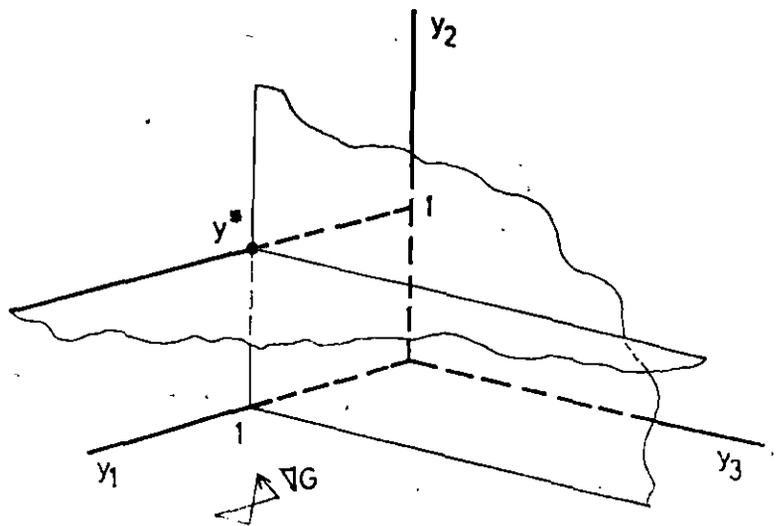


Figura II.17

$$\underline{x}^* = (20, 0, 15)$$

$$F^* = 20 - 0 + 15 = 35$$

$$\underline{y}^* = (1, 0, 1)$$

$$G^* = 20 + 0 + 15 = 35$$

Observemos que a cada restricción b_i corresponde una variable dual y_i . En este caso $y_2^* = 0$ lo que significa, como veremos, que la restricción correspondiente no actúa o es sobreabundante. (Ver Figura II.16, el plano $x_2 = 10$ no pasa por el punto \underline{x}^* , puede variar en un entorno y no modificará la solución). Como y_1^* e y_3^* son distintas de cero, las correspondientes restricciones son activas y se cumplen como igualdad: $x_1 = 20$; $x_3 = 15$, o sea las variables de holgura son igual a cero.

Si analizamos el proceso de construcción del dual, es fácil ver que el dual del dual nos da nuevamente el primario. Es así que como $x_2^* = 0$, la segunda restricción no es activa $y_2 > -1$ (dado que $y_2 \geq 0$). Las otras se cumplen como igualdad: $y_1 = 1$ $y_3 = 1$.

La naturaleza de los problemas duales, queda clarificada empleando los multiplicadores de Lagrange, ya que las variables duales pueden considerarse los multiplicadores de Lagrange del problema primario. (Ver Anexos 1.b y 5).

Las funciones de Lagrange para ambos problemas, en lenguaje vectorial, son:

<u>primario</u>	<u>dual</u>
$L(\underline{X}, \underline{Y}) = \underline{C} \cdot \underline{X} + \underline{Y} \cdot (\underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{X})$	$L(\underline{Y}, \underline{X}) = \underline{Y} \cdot \underline{b} + (\underline{C} - \underline{Y} \cdot \underline{A}) \cdot \underline{X}$
$= \underline{C} \cdot \underline{X} + \underline{Y} \cdot \underline{b} - \underline{Y} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}$	$= \underline{Y} \cdot \underline{b} + \underline{C} \cdot \underline{X} - \underline{Y} \cdot \underline{A} \cdot \underline{X}$

Resultado extraordinario que indica que la lagrangiana y las condiciones de Kuhn-Tucker son las mismas para ambos problemas. En base a este resultado, se derivan los siguientes teoremas fundamentales (Demostración en Anexo 5):

I.1.: Condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución, en un problema de P.L., es que los conjuntos de valores admisibles tanto en el primario como el dual, no sean vacíos.

I.1.: La condición necesaria y suficiente para que un vector admisible represente una solución a un problema de P.L., es que exista un vector admisible para el problema dual, para los cuales los valores de las funciones objetivo de ambos problemas, sean iguales.

I.1.: Una condición necesaria y suficiente para que los vectores admisibles \underline{X}^* , \underline{Y}^* resuelvan los problemas duales es que satisfagan las condiciones llamadas de holgura complementaria:

$$(\underline{C} - \underline{Y}^* \cdot \underline{A}) \cdot \underline{X}^* = 0$$

$$\underline{Y}^* \cdot (\underline{b} - \underline{A} \cdot \underline{X}^*) = 0$$

lo que se desprende directamente de las condiciones de Kuhn-Tucker.

Hay una condición que conviene recordar, pues es muy útil para resolver los problemas de P.L.:

Si una cierta restricción se satisface en la solución como desigualdad estricta ($<$), entonces la variable dual correspondiente es cero en la solución, y si una variable es positiva en la selección, entonces la restricción de desigualdad correspondiente en el problema dual, se satisface como igualdad.

Si, por ejemplo, resolvemos el problema dual encontramos de este modo, en forma inmediata, qué variables primarias son cero en la solución y qué restricciones de desigualdad primarias, se satisfacen en la solución óptima \underline{X}^* , como igualdades.

Vemos un ejemplo:

$$\min F = 5x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 12x_4$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 &\geq 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 1 \\ x_i &\geq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

por ser de cuatro variables no podremos resolverlo geoméricamente, pero como sólo tiene dos restricciones, a cada una de las cuales corresponde una variable dual y_1 , y_2 , podremos resolver el problema dual gráficamente:

dual

$$\max G = y_1 + y_2$$

restricciones

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 5 && (a) \\ y_2 &\leq 5 && (b) \\ y_1 + 2y_2 &\leq 12 && (c) \\ 2y_1 + y_2 &\leq 12 && (d) \\ y_1 &\geq 0 ; y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

problema ya resuelto en II.4.2.

$$y_1^* = 4 ; \quad y_2^* = 4 ; \quad F^* = 8$$

con lo que sabemos: $G^* = 8$

Además, reemplazando y^* , (a) y (b) se satisfacen como desigualdad estricta, por lo que sus correspondientes variables duales son igual a cero:

$$x_1^* = 0 \quad x_2^* = 0$$

En el punto óptimo y^* (c) y (d) son igualdades, significando ésto que

$$x_3^* > 0 \quad x_4^* > 0$$

pero más importante aún, al ser y_1^* y_2^* distintas de cero, las

restricciones del problema primario son igualdades (el dual del dual es primario). Sabemos entonces que:

$$F^* = 5x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 12x_4 = 12x_3 + 12x_4 = 8$$

y las restricciones:

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 + 2x_4 &= x_3 + 2x_4 = 1 \\x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2x_3 + x_4 = 1\end{aligned}$$

dos ecuaciones con dos incógnitas, podemos resolver:

$$x^*_3 = 1/3 \quad ; \quad x^*_4 = 1/3$$

comprobamos que

$$F^* = (1/3).12 + (1/3).12 = 8$$

Interpretación de las variables duales

Dado que las variables del problema dual son multiplicadores de Lagrange para el problema primario, pueden interpretarse (Anexo S) como la sensibilidad del valor optimal F^* de la función objetivo con respecto a los cambios en las constantes de restricción b_i , o sea

$$y^* = \frac{\partial F^*}{\partial b} \quad \text{o desarrollando:}$$

$$y^*_1 = \frac{\partial F^*}{\partial b_1}$$

$$y^*_m = \frac{\partial F^*}{\partial b_m}$$

De forma análoga, considerando el efecto de cambiar las constantes de restricción del problema dual, será:

$$\underline{x}^* = \frac{\partial G^*}{\partial \underline{C}} \quad \text{o desarrollando:}$$

$$x_1^* = \frac{\partial G^*}{\partial C_1}$$

$$x_n^* = \frac{\partial G^*}{\partial C_n}$$

Si una variable dual $y_i^* = 0$, el valor óptimo de la función objetivo F^* es independiente de la constante de restricción respectiva b_i , dentro de un entorno suficientemente pequeño. (Ver Figura II.18).

En este caso podría eliminarse la correspondiente restricción sin que varíe el óptimo, no tiene efecto alguno sobre la solución del problema.

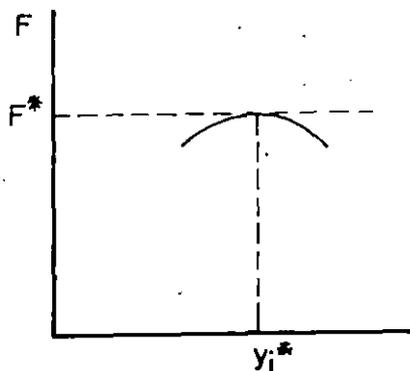


Figura II.18

En ciertos problemas de distribución o asignación de recursos, las variables duales tienen la dimensión $(\Delta F / \Delta b_i)$ o sea de un precio (pseudoprecio) del recurso b_i , precios imputados, precios sombra o precios de cuenta.

Si la restricción correspondiente al recurso b_i , no es limitativa o activa, o sea se cumple en el óptimo como desigualdad estricta, significa que la demanda es estrictamente menor que la oferta, determinando un precio sombra igual a cero.

La solución es entonces, como se ha visto, independiente de la oferta total disponible del bien dado, ya que existe más que

suficiente de ese bien, en relación a su uso en el punto óptimo.

Si en la solución óptima del primario, $x_i > 0$, entonces la correspondiente restricción del dual se satisface con igualdad:

$$a_{1i} Y_1 + a_{2i} Y_2 + \dots + a_{ni} Y_n = C_i$$

en consecuencia, para los bienes producidos, el valor del recurso empleado en su producción, es exactamente igual al beneficio unitario, obtenido por la venta del producto.

La valorización de los recursos por medio de las variables duales y_i , es entonces una valuación por costos de oportunidad.

Por otra parte, como en el punto óptimo, el valor de ambas funciones objetivo, F^* y G^* es igual, significa que el máximo beneficio es igual al mínimo valor de los recursos.

II.4.4. Aplicaciones

Ejemplo 1. Veremos con más detalle el caso de asignación óptima de recursos del Punto II.4.2.

Se trata de maximizar el valor F de un conjunto de bienes x_i que se producen a partir de un conjunto dado de recursos o factores b_j .

La "función económica" o "función de satisfacción" se supondrá de tipo lineal y se trata que tome el máximo valor compatible con las restricciones impuestas.

$$\text{máx } F = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

p_i = precio unitario de los productos i
 x_i = cantidad del producto i

restricciones:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

a_{ji} son los coeficientes técnicos de transformación de los recursos j en los productos i .

Resuelto este problema de P.L., se obtienen:

- Las cantidades x_i de bienes producidos.
- Los costos marginales ligados a cada x_i : dF/dx_i , resultante de producir una unidad más del bien i .
- Los costos marginales ligados a cada restricción: dF/db_j , resultantes de restringir en una unidad el empleo de un factor.

Plantearemos un caso concreto muy simple:

Se trata de producir dos bienes: portaminas y lapiceras que tienen un precio de venta de 1 A cada un mil. Se consideran tres recursos o factores utilizados en la fabricación de estos bienes, de los que se dispone: 4 kg de cobre, 11 kg de aluminio y 18 kg de material plástico. Por cada mil portaminas se utilizan 1 kg de aluminio y 3 kg de material plástico y por cada lapicera 1 kg de cobre, 2 de aluminio y 1 de material plástico.

Se desea maximizar el ingreso. En fórmulas ($x_1=1$ ó $x_2=1$ significan 1.000 unidades). Ver Figura II.19..

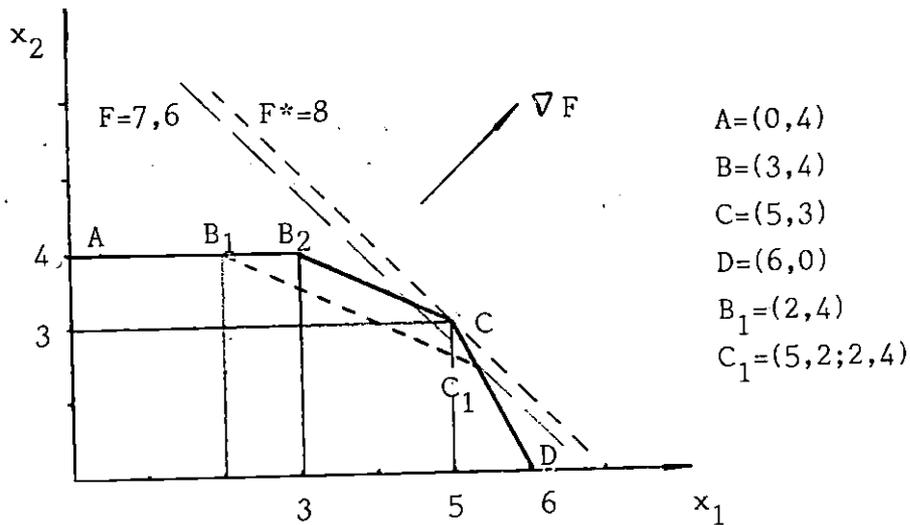


Figura II.19

$$\max F = x_1 + x_2$$

restricciones:

$$\begin{aligned}
 x_2 &\leq 4 & (a) \\
 x_1 + 2x_2 &\leq 11 & (b) \quad \nabla F = (1,1) \\
 3x_1 + x_2 &\leq 18 & (c)
 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$$

Planteamos el dual:

$$\min G = 4y_1 + 11y_2 + 18y_3$$

$$y_2 + 3y_3 \geq 1 \quad (d)$$

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \quad (e)$$

$$y_1 \geq 0 ; y_2 \geq 0$$

Observando la Figura II.19, vemos que en el primario, la restricción (a) no es activa, la variación de $b_1 = 4$, dentro de ciertos límites, no afecta la solución $x_1^* = 5$ $x_2^* = 3$ $F^* = 8$. Por ello la variable dual correspondiente será nula en el punto óptimo:

$$y_1^* = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 0$$

Como las restricciones (b) (c) son activas, $y_2 > 0$ $y_3 > 0$ y las restricciones (d) (e) en el dual se cumplen como igualdades. Este conocimiento, nos permite resolver el dual resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}
 y_2 + 3y_3 &= 1 \\
 2y_2 + y_3 &= 1
 \end{aligned}$$

o sea

$$y_1^* = 0 \quad ; \quad y_2^* = 0,4 \quad ; \quad y_3^* = 0,2 \quad ; \quad G^* = 8$$

Conocemos los resultados al costo marginal $dF^*/dx_1 = 1$ $dF^*/dx_2 = 1$ y los costos marginales de las variables de holgura

$$\frac{dF^*}{db_1} = y_1^* = 0 \quad ; \quad \frac{dF^*}{db_2} = y_2^* = 0,4 \quad ; \quad \frac{dF^*}{db_3} = y_3^* = 0,2$$

Si variamos la restricción (b) en una unidad o sea $x_1 + 2x_2 \leq 10$, vemos gráficamente que se representa por B_1C_1 y el nuevo punto óptimo es C_1 de coordenadas $x_1 = 5,2$ $x_2 = 2,4$, la nueva F^*

será $F^* = 5,2 + 2,4 = 7,6$ por lo que

$$\frac{F^*}{b} = \frac{8 - 7,6}{1} = 0,4$$

que coincide con $y_2 = 0,4$

El significado de y_i^* es el de un precio sombra, precio de cuenta de eficiencia [17] valoran la escasez y utilidad de los bienes y servicios involucrados. En este caso el precio sombra del aluminio es 0,4 \$/kg.

El problema primario se trata de encontrar las cantidades de bienes a producir, x_i , a partir de cantidades limitadas de recursos b_i , que maximizan el valor de la función económica F , siendo conocidos los precios p_i de los mencionados bienes x_i .

En el dual se determina el sistema de precios y_j correspondientes a la utilización de los factores b_j , tales que el sistema de precios p_i de los productos, resulte satisfecho. Esto significa que las cantidades de factores o recursos b_j incorporadas a una unidad de producto x_i , serán tales que las sumas de sus valores $a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n$ sea igual o menor que el precio p_i de una unidad de producto x_i .

Dado que las funciones objetivo del primario y del dual, son iguales en el óptimo, el máximo beneficio, es igual al mínimo valor de los recursos. (Ver más detalles en Anexo 5).

Estos cálculos son válidos en un contexto invariable, como es el de una empresa que no ejerce una acción significativa sobre el medio en que está inserta. Pero a medida que los programas abarquen el largo plazo, el contexto y el cálculo económico están menos determinados.

Por ejemplo las disponibilidades b_j varían (la duración del trabajo, la capacidad de equipos y máquinas, etc.), la elección de la tecnología es más libre, con lo que varían los a_{ji} ; los precios p_i varían en el mercado de bienes.

Ejemplo 2. Productos ligados. [1] (pág. 28).

Una refinería produce dos productos distintos en una misma operación y por eso se los llama productos ligados. Se operan dos procesos: el de destilación y el de cracking catalítico o desintegración. En ambos procesos se producen productos blancos o livianos como la gasolina y querosene y productos pesados como el fuel-oil.

Llamando x_1 el volumen de crudo disponible para procesar, en toneladas por año, y x_2 la parte de los productos pesados resultantes de la destilación que se reprocesa por cracking catalítico. En la Figura II.20 se indican la proporción de productos blancos y pesados que se obtienen.

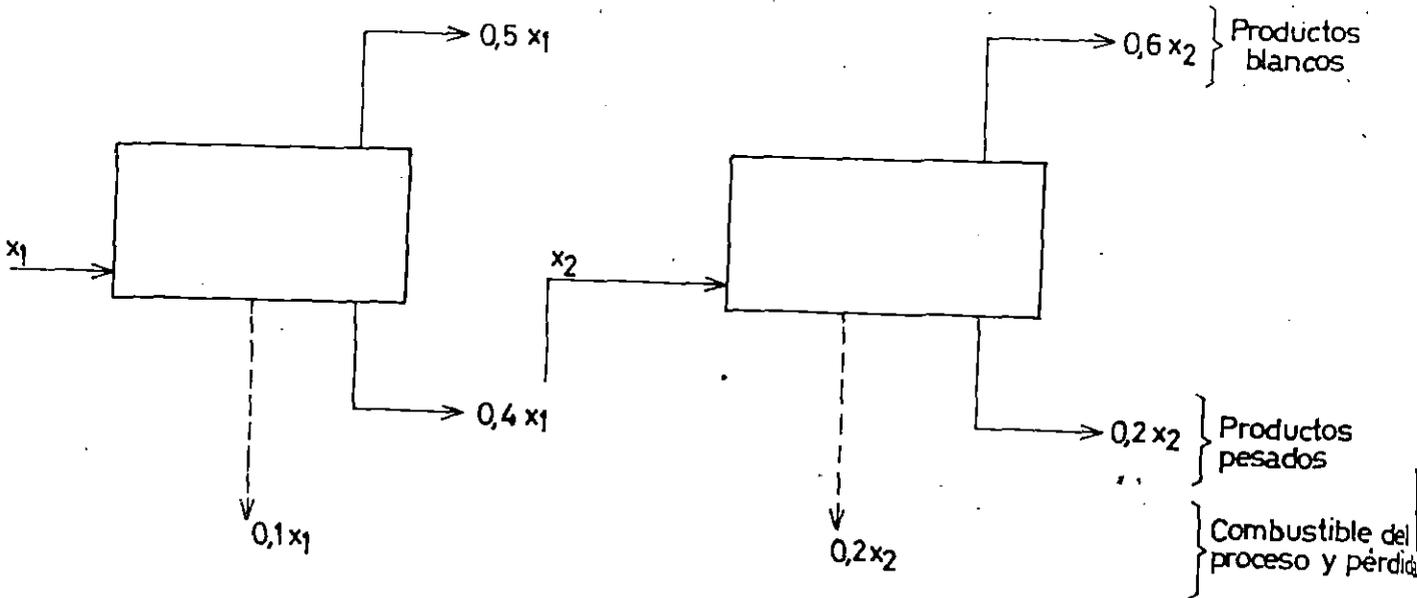


Figura II.20

Las capacidades máximas de procesamiento son M_1 y M_2 y se trata de minimizar el costo de operación de la refinería, frente a la demanda q_b y q_p de productos blancos y pesados. En fórmulas:

$$\min G = C_1 x_1 + C_2 x_2 \quad \begin{array}{l} C_1 = \text{costos de operación} \\ C_1 \text{ mucho mayor que } C_2 \end{array}$$

restricciones:

$$\begin{array}{ll} 0,5x_1 + 0,6x_2 \geq q_b & (a) \\ 0,4x_1 + (0,2-1)x_2 \geq q_p & (b) \\ x_1 \leq M_1 & (c) \\ x_2 \leq M_2 & (d) \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

En la Figura II.21 se representan estas ecuaciones y se obtiene gráficamente la solución.

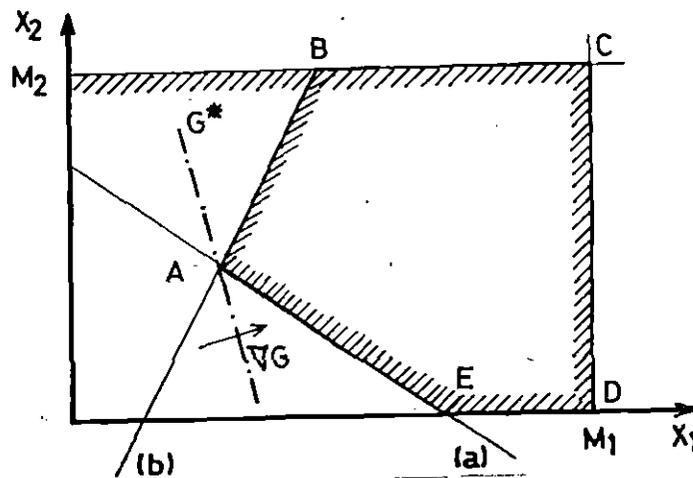


Figura II.21

Coordenadas del punto óptimo

$$A: \begin{cases} x^*_1 = 0,75 q_b + 1,56 q_p \\ x^*_2 = 0,625 q_b - 0,78 q_p \end{cases}$$

Como $C_1 \geq 0$ y $C_2 \geq 0$, el punto óptimo no variará hasta que

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{0,6}{0,5} = 1,2$$

Las restricciones (c) y (d) no son activas en el caso dibujado (depende de la demanda de productos q_b y q_p), pero en algún momento serán limitantes, a medida que crezcan esas demandas.

El planteo del programa dual será:

$$\text{máx } F = q_b \cdot y_1 + q_p \cdot y_2 - M_1 y_3 - M_2 y_4$$

$$0,5y_1 + 0,4y_2 - y_3 \leq C_1$$

$$0,6y_1 - 0,8y_2 - y_4 \leq C_2$$

$$y_1 \geq 0 ; y_2 \geq 0 ; y_3 \geq 0 ; y_4 \geq 0$$

donde para el caso de Figura II.21, será $y^*_3=0$ y $y^*_4=0$ y las restricciones son igualdades:

$$0,5y_1 + 0,4y_2 = C_1 \quad (1)$$

$$0,6y_1 - 0,8y_2 = C_2 \quad (2)$$

el óptimo será:

$$y_1^* = 1,248 C_1 + 0,62 C_2; \quad y_2^* = 0,94 C_1 + 0,78 C_2; \quad y_3^* = 0; \quad y_4^* = 0$$

La interpretación de (1) es: Es óptimo destilar una cantidad x^*_1 tal que su costo C_1 sea igual al valor agregado calculado con los precios y_1 e y_2 . Recordemos que y_1 e y_2 son los precios sombra o costos marginales de los productos blancos y pesados respectivamente.

La relación (2) indica que es óptimo reprocesar hasta una cantidad x^*_2 de productos pesados, tal que el costo de oportunidad sea igual al valor agregado por el cracking catalítico.

Analizando el valor de y^*_1 vemos que nunca es nulo, o sea que la cantidad de productos blancos nunca supera las necesidades del mercado. Esto resulta evidente en la Figura II.21, ya que siendo $C_1 \gg 0$ $C_2 \gg 0$, la recta G^* solución pasa por el vértice A del poliedro convexo ABCDE, y cuando mucho coincidirá con AE o pasará por el vértice E (AB, B, C, no pueden ser solución óptima).

Si despreciamos C_2 frente a C_1 , lo que es razonable y recordando que C_1 es el precio del crudo, por ejemplo: 20 dól/br, tendremos:

$$\begin{aligned} y_1^* &= 20 \times 1,248 = 24,96 \text{ d/b} \\ y_2^* &= 20 \times 0,94 = 18,8 \text{ d/b} \end{aligned}$$

Esto indica cómo los costos marginales de los productos son proporcionales al precio del crudo de acuerdo con una relación puramente técnica.

Ejemplo 3. Despacho hidrotérmico.

Daremos los lineamientos generales de un caso dinámico, o sea variable en función del tiempo, planteándolo como un problema de programación lineal estática.

Se trata de un aprovechamiento hidroeléctrico que turbinando un caudal x de agua genera una cantidad $G_H = \alpha x$ de energía eléctrica, siendo α el coeficiente de transformación m^3 de agua-kWh generados. La demanda D se satisface con G_H y un sistema de generación térmica G_T que tiene un costo lineal de $C.G_T$.

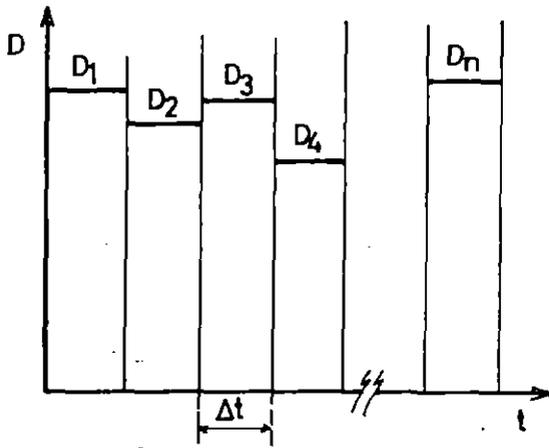


Figura II.22

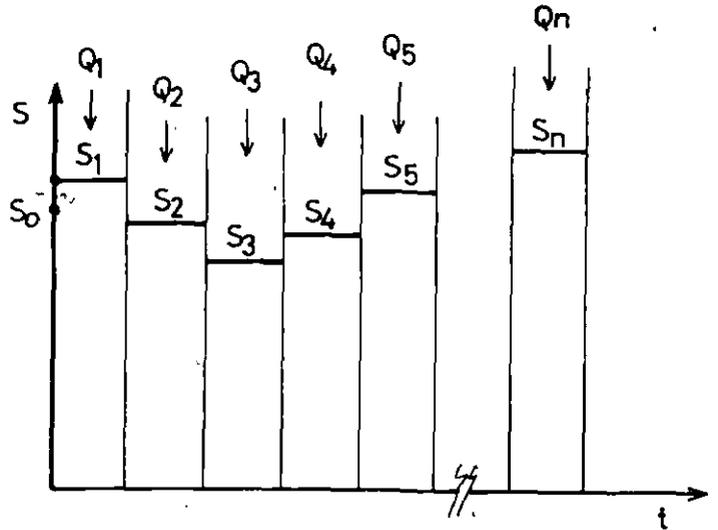


Figura II.23

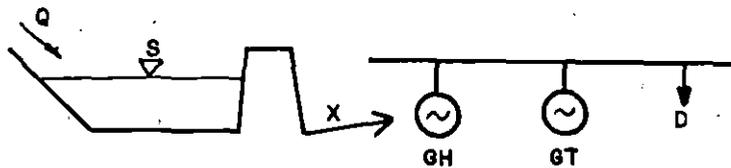


Figura II.24

Se recibe agua en función del tiempo $Q(t)$ y se entrega el dique al comenzar el periodo con $S_0 \text{ m}^3$ de agua y se entrega el dique al comenzar el periodo con $S_0 \text{ m}^3$ de agua y debe ser entregado al fin de un año con $S_n \text{ m}^3$ de agua.

Discretizamos el problema en lapsos Δt , con lo que la función Demanda $D(t)$ se lee D_1, \dots, D_n ; la cantidad de agua embalsada en esos periodos: S_0 inicial, S_1, \dots, S_n ; la cantidad de agua recibida de la cuenca Q_1, Q_2, \dots, Q_n . La cantidad a turbinar, para generar energía eléctrica, está limitada por la potencia de los turbogeneradores, digamos X . La ecuación de continuidad nos dice que

$$S_i = S_{i-1} + Q_i - X_i$$

o sea el agua embalsada al fin del periodo i es igual al agua que se tenía al finalizar el periodo $(i-1)$ más el agua Q_i recibida en el periodo i menos el agua turbinada X_i . Se trata de minimizar el costo de la generación térmica en todo el periodo.

El "truco" está aquí en reemplazar el agua turbinada en función del tiempo $X(t)$, por n variables X_1, X_2, \dots, X_n , cada una de ellas indicando el agua turbinada en cada periodo, como si fueran independientes. Se ha transformado un problema dinámico en un problema estático.

Función objetivo:

$$\min F = C_1 (D_1 - a X_1) + \dots + C_n (D_n - a X_n)$$

$$\min F = \sum_{i=1}^n C_i \cdot D_i - a \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j$$

restricciones:

periodo 1: $S^0 + Q_1 - X_1 \geq 0$ (agua existente + agua recibida - agua turbinada ≥ 0)

periodo 2: $S^0 + Q_1 - X_1 + Q_2 - X_2 \geq 0$

.....

periodo n : $S^0 + Q_1 - X_1 + Q_2 - X_2 + \dots + Q_n - X_n \geq S^n$

ordenando:

$$X_1 \leq S^0 + Q_1$$

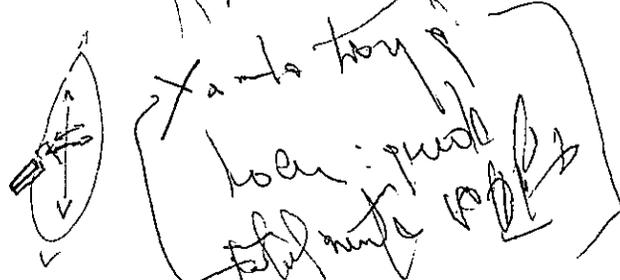
$$X_1 + X_2 \leq S^0 + Q_1 + Q_2$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq S^0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n - S^n$$

$$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0 \quad \dots \quad X_n \geq 0$$

Con los datos, la resolución de este programa lineal es fácilmente realizable por el método simplex.

*Por que hay se
 X a to to y p?
 huer: quod
 tabulante*



III CONTROL Y OPTIMIZACION DE SISTEMAS DINAMICOS

Hasta ahora hemos visto los problemas de programación matemática, casos estáticos que consistían en elegir valores de unas ciertas variables, llamadas de decisión, dentro de un conjunto dado de valores admisibles, de modo tal que optimicen una función dada llamada función objetivo.

El problema dinámico, en lenguaje económico, consiste en distribuir recursos escasos entre objetivos que compiten en un intervalo de tiempo, que va desde un tiempo inicial hasta un tiempo final. Matemáticamente, se trata de elegir funciones del tiempo para ciertas variables llamadas de control que mediante un sistema de ecuaciones diferenciales describirán, una vez resuelto, el curso temporal de las variables de estado. Las variables de control se eligen de modo tal que optimicen un funcional dado, llamado funcional objetivo. Este es el problema de control óptimo.

III.1. Sistemas dinámicos. Control

El análisis de los sistemas dinámicos, convenientemente modelizados, nos ayuda a entender distintos fenómenos a nuestro alrededor.

El campo de la teoría de control, tiene por objetivo influir en el comportamiento de los sistemas.

Un sistema dinámico, se modeliza normalmente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

o vectorialmente

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$$

Sus soluciones son las trayectorias que indican el desarrollo en el tiempo de las variables de estado (x_1, x_2, \dots, x_n) o sea su comportamiento.

Para controlar este sistema, se introducen variables de entrada (inputs) u_1, \dots, u_r que bajo control externo modifican las soluciones según se desee.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_r) \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n; \mu_1, \dots, \mu_r) \\ \dot{X} &= f(X; \mu)\end{aligned}$$

Los modelos de variables de estado, buscan las trayectorias de todas esas variables, a partir de un conjunto de condiciones iniciales. En muchos casos solo interesa el comportamiento de algunas variables de especial importancia o susceptibles de medición. Estas variables se llaman variables de salida (outputs). Como ejemplo el sistema "automóvil" tiene una serie de variables de estado tales como el movimiento de pistones, engranajes, presión y temperatura de gases de combustión, velocidad y dirección del vehículo. De estas, en la mayoría de los casos, solo interesa, o son fácilmente medibles, la velocidad, la dirección del movimiento, la posición; estas son las variables de salida: outputs. Las variables de entrada, inputs, podrían ser en este caso la posición del acelerador y el giro del volante. El resto de las variables queda en una caja negra.

En fórmulas, para el caso lineal:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A \cdot X(t) + B \cdot \mu(t) \\ \dot{Y}(t) &= C \cdot X(t)\end{aligned}\tag{1}$$

A, B, C = matrices constantes
Y = Vector de variables de salida

Hay dos conceptos duales importantes, observabilidad y controlabilidad, en sistemas de entrada-salida.

Diremos que el sistema (1) es completamente controlable, si para $X(0) = 0$ y todo estado dado X_1 , existe un tiempo finito t_1 y variables de entrada $\mu(t)$, continuas por trozos, $0 \leq t \leq t_1$, tal que

$$X(t_1) = X_1.$$

Un sistema es completamente controlable si su estado se puede llevar en tiempo finito desde el origen, a cualquier otro estado. Como ejemplo citaremos el control de un helicóptero, un cohete en su lanzamiento.

Se dirá que el sistema (1) es completamente observable, si existe un $t_1 > 0$, tal que el conocimiento de $Y(t)$ para todo t , $0 \leq t \leq t_1$ es suficiente para determinar $X(0)$.

Conociendo los valores de las variables de salida (outputs), el valor del estado inicial se puede inferir si el sistema es completamente observable.

Las variables de control, se determinan corrientemente sobre la base de la observación de las variables de salida.

Si la estructura de salida es deficiente en el sentido que no provee información completa sobre el vector estado, entonces no será en general posible diseñar estrategias de control adecuadas.

Entonces, un buen control requiere ambas condiciones: habilidad para inferir que es lo que el sistema está haciendo (observabilidad) y la habilidad para cambiar el comportamiento del sistema (controlabilidad).

III.2. Optimalidad

El problema básico de control óptimo, puede expresarse en tiempo continuo, definido en un intervalo fijo $0 \leq t \leq T$ de este modo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t); \underline{u}(t)) \quad (2)$$

con las condiciones iniciales

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (3)$$

y un conjunto de controles admisibles:

$$\underline{u}(t) \in U \quad (4)$$

y un funcional objetivo:

$$J = F(\underline{x}(T)) + \int_0^T I(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) dt \quad (5)$$

a maximizar o minimizar.

La restricción (4) generalmente tiene la forma de desigualdades en las componentes de $\underline{u}(t)$, por ejemplo la potencia de un motor, una cantidad de combustible, cantidad de recursos, etc.

En (5) F e I son funciones de valores reales de sus respectivos argumentos. El término $F(\underline{x}(T))$, llamada función final, es la contribución al funcional objetivo, del estado final. Por ejemplo, esto aparece si se desea controlar un móvil en modo tal de llegar a un tiempo final dado con máxima velocidad, o planificar asignación de recursos en el tiempo, tal que se llegue

al final con el máximo posible.

El término integral representa una contribución que se acumula durante todo el tiempo $0 \leq t \leq T$, por ejemplo si se desea minimizar el consumo total de combustible de un cohete o maximizar un ingreso. Un problema específico puede tener $F = 0$ ó $I = 0$ pero no ambas. $I(\cdot)$ se llama la función intermedia.

Con el funcional tal como en (5), el problema se llama de Bolza, mientras que si I es idénticamente nula, o sea $J = F(\underline{X}(T))$, se le denomina el problema de Mayor (Anexo 4).

En el problema planteado, $\underline{u}(t)$ es la incógnita en $0 \leq t \leq T$. Cuando se la conoce, la ecuación (2) y la (3), se determina unívocamente una trayectoria de estado $\underline{X}(t)$, $0 \leq t \leq T$. Ambas \underline{X} y \underline{u} determinan un valor de J . El problema es encontrar la función vectorial de control $\underline{u}(t)$, $0 \leq t \leq T$, que satisfaciendo las restricciones (1), optimice la funcional J .

III.2.1. Programación dinámica

La programación dinámica es una de las modernas aproximaciones, junto con el principio del máximo, al problema general del control, según (2) (3) (4) y (5) del Punto III.2.

Para resolverlo, Bellman aplicó el "Principio Básico de Optimalidad" para obtener una relación de recurrencia fundamental. Este dice lo siguiente (daremos más adelante otra versión). "Una política optimal tiene la propiedad de que cualesquiera que sean el estado y decisión iniciales (es decir el control), las decisiones restantes deben constituir una política optimal con respecto al estado resultante de la primera decisión" [3].

Como resultado obtuvo una ecuación en derivadas parciales, llamada ecuación de Bellman (caso del máximo):

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\underline{u}} \left\{ I(\underline{X}, \underline{u}) + \left\langle \frac{\partial J^*}{\partial \underline{X}}, f(\underline{X}, \underline{u}) \right\rangle \right\}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica producto escalar.

La condición de contorno asociada a esta ecuación es:

$$J^*(\underline{X}(T), T) = F(\underline{X}(T))$$

Generalmente esta ecuación no tiene solución analítica (ver Anexo 4.c.). Se utilizan más corrientemente los métodos numéricos que resuelven las versiones discretas de la ecuación de Bellman.

Estudiaremos un caso particular de la solución por programación dinámica.

Se busca el máximo o el mínimo de la función de N variables.

$$R(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_N(x_N)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_N &= x \\ x_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Este es un problema aparentemente simple de asignación de recursos, donde la utilidad total es suma de las utilidades de las actividades individuales.

Las dificultades que presentan otros métodos como el de Lagrange, es que necesitan que las funciones g_i sean continuas y diferenciables, lo que no siempre se da. Por otra parte con el método de Lagrange obtenemos máximos o mínimos relativos y no absolutos y si no analizamos bien el problema, podemos llegar a considerar puntos de inflexión como extremos.

Por otra parte debe hacerse notar que los métodos que operan con derivadas de funciones que en la práctica no se conocen con precisión sino con un cierto margen de error ϵ , pueden dar soluciones irreales. Esto no ocurre con los métodos que usan integrales, donde los errores se "aplastan".

Estas situaciones se han graficado en la Figura III.1, en cuya parte a) vemos la gráfica de una función discontinua y otra que aún siendo continua no es continuamente diferenciable y por lo tanto no se les pueden aplicar los criterios clásicos del cálculo diferencial. En la Figura III.1.b) tenemos una función que en el interior del intervalo presenta extremos relativos y un punto de inflexión pero sus extremos absolutos están en la frontera del intervalo. En consecuencia, a pesar de satisfacer los requerimientos de diferenciability, las técnicas clásicas no son aplicables para encontrar los extremos absolutos. En la Figura III.1.c) se representa el caso en que se conoce aproximadamente el valor de la función, es decir con un cierto margen de error, pero nada se puede decir respecto a su derivada.

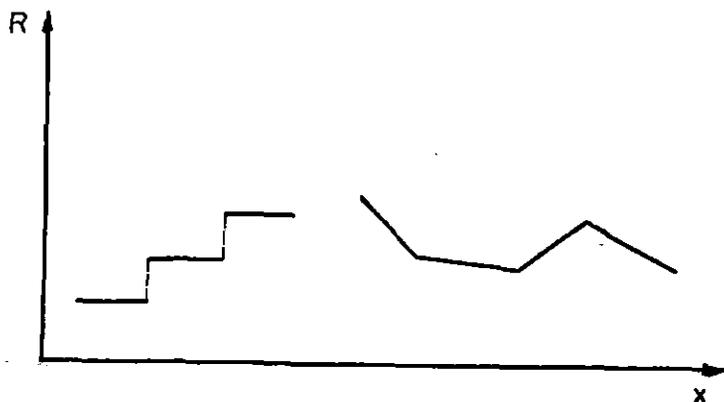


Figura III.1.a)

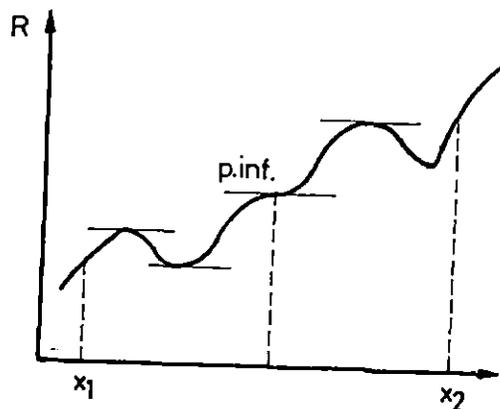


Figura III.1.b)

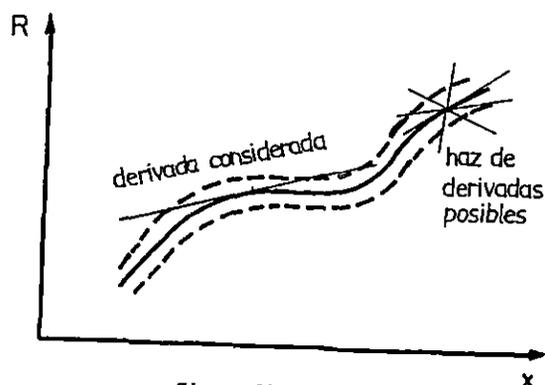


Figura III.1.c)

Richard E. Bellman introdujo en 1955 un método, llamado por él de Programación Dinámica, muy potente, ampliamente difundido.

Como base estableció el principio de optimalidad que expresa:

"Toda política óptima debe estar formada por subpolíticas óptimas".

Si entendemos por política óptima a una secuencia de decisiones que lleven el sistema de un estado inicial a uno final optimizando una función objetivo, el principio de optimalidad establece que cualquier secuencia de decisiones entre dos estados intermedios debe ser también óptima.

Podemos expresar lo mismo gráficamente (ver Figura III.2), en el espacio de los estados del sistema, donde la trayectoria AB es óptima (mínima longitud sobre S, superficie de restricciones, donde las longitudes significan gastos a minimizar).

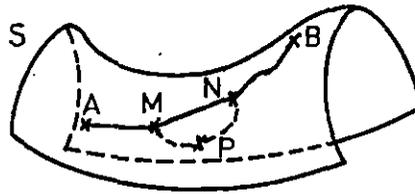


Figura III.2

Si el camino AB es óptimo, el camino MN debe serlo también pues si lo fuera por ejemplo el MPN, entonces el camino óptimo sería AMPNB en lugar de AMNB.

Para resolver el problema (*) planteado, el que a primera vista es un proceso estático de asignación de recursos, introduciremos artificialmente el tiempo haciendo que las asignaciones se hagan una por vez.

Primero se asigna una cantidad de recursos a la actividad N, luego a la (N-1) y así sucesivamente. Visto así tendremos un proceso de asignación dinámica.

Introduciremos así la secuencia de funciones $f_N(x)$ definidas para $N = 1, 3, \dots, x \geq 0$ del siguiente modo:

$$f_N(x) = \max_{\{x_i\}} R(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

donde:

$$x_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^N x_i = x$$

La función $f_N(x)$ es entonces el rédito o ganancia (utilidad) óptima de la asignación de la cantidad de recursos x a las N actividades.

Supondremos que $f_N(0) = 0$ para $N = 1, 2, \dots$ ya que

$$g_i(0) = 0 \quad \forall i$$

y también se vé que:

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \forall x \geq 0$$

Buscaremos una relación de recurrencia que conecte $f_N(x)$ y $f_{N-1}(x)$ para N y x arbitrarios.

Sea x_N la asignación hecha a la actividad N , $0 \leq x_N \leq x$.

Por el Principio de Optimalidad el resto de los recursos $x - x_N$, deberán ser usados para obtener una utilidad máxima de las restantes $(N-1)$ actividades.

Como por definición, la utilidad óptima para las $(N-1)$ actividades con recursos $x - x_N$ es $f_{N-1}(x - x_N)$ vemos que la asignación inicial de x_N a la actividad N resulta dar una utilidad total:

$$g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N) \quad (**)$$

para todo el proceso de N actividades.

Un proceso óptimo de elección de x_N será entonces el que maximice esta función (**).

La ecuación funcional básica será:

$$f_N(x) = \max_{0 \leq x_N \leq x} \{ g_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N) \} \quad \forall N = 2, 3, \dots$$
$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad f_1(x) = g_1(x)$$

Conocida f_1 se obtienen las f_i inductivamente.

A efectos de tabular valores, se discretiza el problema tomando para x , no un intervalo continuo sino

$$x = 0, \Delta, 2\Delta, \dots, R\Delta$$

dependiendo Δ del problema y de la capacidad de cálculo y memoria que se disponga.

Resumiendo:

$$f_1(x) = g_1(x)$$

se memorizan los valores

$$f_1(k\Delta) \quad k = 0, 1, \dots, R$$
$$f_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} \{ g_2(x_2) + f_1(x - x_2) \}$$

donde se toman sólo los valores

$$0, \Delta, 2\Delta, \dots, R\Delta$$
$$f_2(x) = \max_{k \in \{0, 1, \dots, R\}} \{ g_2(k\Delta) + f_1(x - k\Delta) \}$$

Se comenzará evaluando

$$g_2(0) + f_1(x)$$

versus

$$g_2(\Delta) + f_1(x - \Delta)$$

tomando la cantidad mayor. Luego

$$g_2(2\Delta) + f_1(x - 2\Delta)$$

se calcula y compara con la anterior y así sucesivamente.

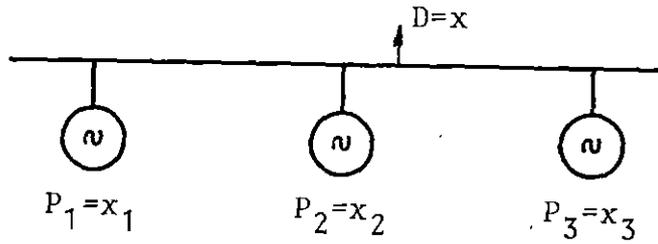
Puede usarse una tabla como la siguiente:

x	f ₁ (x)	x ₁ (x)	f ₂ (x)	x ₂ (x)
0	-	-	-	-
Δ	-	-	-	-
2Δ	-	-	-	-
⋮	-	-	-	-
RΔ	-	-	-	-

III.2.1.1. Aplicaciones a un despacho económico hidrotérmico

Hagamos previamente una aplicación al problema del despacho de cargas, para unidades termoeléctricas.

Sea una central con tres generadores.



Como en el ejemplo anterior se busca minimizar

$$G = F_1(P_1) + F_2(P_2) + F_3(P_3)$$

Siendo F_i el consumo de combustible de la unidad i expresada en \$/h.

Para seguir mejor el algoritmo recurrente de Bellman, usaremos la notación anterior:

$$P_1 = x_1, \quad P_2 = x_2, \quad P_3 = x_3, \quad D = x, \quad G = R$$

minimizar

$$R(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3)$$

Con las restricciones

$$x_i \min \leq x_i \leq x_i \max \quad i = 1, 2, 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = x$$

En el siguiente esquema se indican la potencia de cada unidad, desde el mínimo al máximo que pueden generar, con su costo específico:

unidad 1	
MW	\$/h
25	680
20	485
15	260
10	125

unidad 2	
MW	\$/h
15	265
10	130
5	50

unidad 3	
MW	\$/h
30	890
25	670
20	490
15	280

Las fórmulas de recurrencia serán:

$$f_1(x) = g_1(x)$$

$$f_2(x) = \min_{0 \leq x_2 \leq x} \{ g_2(x_2) + f_1(x-x_2) \}$$

$$f_3(x) = \min_{0 \leq x_3 \leq x} \{ g_3(x_3) + f_2(x-x_3) \}$$



y la tabla correspondiente, discretizando el problema en tramos de 5 MW,:

<u>x</u>	<u>f₁(x)</u>	<u>x₁(x)</u>	<u>f₂(x)</u>	<u>x₂(x)</u>	<u>f₃(x)</u>	<u>x₃(x)</u>
5	-	-	-	-	-	-
10	125	10	-	-	-	-
15	260	15	175	5	-	-
20	485	20	255	10	-	-
25	680	25	390	15	-	-
30	-	-	525	15	455	15
35	-	-	750	15	535	15
40	-	-	945	15	670	15
45	-	-	-	-	705	15
50	-	-	-	-	1015	20
55	-	-	-	-	1195	25
60	-	-	-	-	1415	30
65	-	-	-	-	1615	25
70	-	-	-	-	1835	30

En este caso las restricciones son de mínima y de máxima generación, por lo tanto a medida que se asignan recursos a las distintas máquinas (se las pone en marcha) la generación mínima es la suma de mínimos de cada una.

Observamos que el proceso puede considerarse físicamente de este modo: cuando comenzamos con la primera unidad el combustible, o el dinero, se le asigna sólo a ella y ella es la máquina óptima.

Al considerar la unidad 2 con la 1, $f_2(x)$ y $x_2(x)$ constituyen una máquina ficticia con mínimo 15 y máximo 40, con un consumo indicado por $f_2(x)$, que en cada caso es óptimo.

Esta máquina ficticia se combina con la unidad 3 y se obtiene la $f_3(x)$ y $x_3(x)$ de mínimo 30 MW y máximo 70, también óptima.

Se ejemplifica para el caso 25 MW.

unid.1 = f_1

unid.2 = g_2

unid. fict. = f_2

25	680
20	485
15	260
10	125

15	265
10	130
5	50

40	945
35	750
30	525
25	390
20	255
15	175

La evaluación para ese punto es la siguiente:

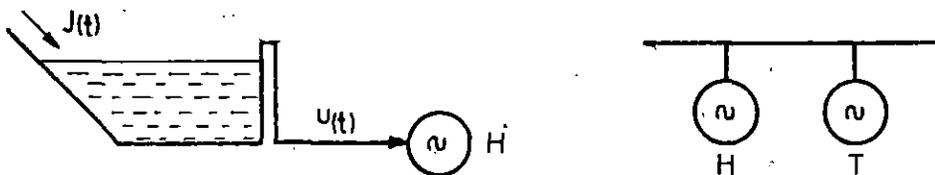
$$f_2(25) = \text{minimo} \begin{cases} g_2(5) + f_1(25-5) = g_2(5) + f_1(20) = 50 + 485 = 535 \\ g_2(10) + f_1(25-10) = g_2(10) + f_1(15) = 130 + 260 = 390 \\ g_2(15) + f_1(25-15) = g_2(15) + f_1(10) = 265 + 125 = 390 \end{cases}$$

El mínimo podrá obtenerse asignando a la unidad 2 tanto 15 como 10 MW. En el ejemplo se asignó 15, pero podría haber sido igualmente 10, generalmente, al haber coincidencia, alguna consideración física permite la elección.

Aplicación a un despacho económico hidrotérmico

Este es un problema muy difícil, que obliga a recurrir a poderosas herramientas matemáticas (cálculo de variaciones, análisis funcional, principio de máxima). Con programación dinámica, la resolución es teóricamente muy fácil, pero puede haber dificultades por necesidad muy grande de memoria o tiempos de cálculo muy largos.

Nos planteamos el siguiente problema. Una central hidroeléctrica y una central térmica.



El estado del sistema hidráulico queda determinado por la sola variable $x(t)$ que da el volumen embalsado para el tiempo t , sus restricciones son

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$$

Llamaremos:

- $J(t)$ = ingreso de agua en el tiempo t (m^3/s)
- $E(t)$ = evaporación de agua (m^3/S)
- $R(t)$ = gasto de agua para riego (m^3/S)
- $u(t)$ = agua turbinada en la central hidroeléctrica H (m^3/S)

La ecuación de estado será:

$$\frac{dx}{dt} = J(t) - E(t) - R(t) - u(t)$$

con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ (volumen inicial embalsado) y la función objetivo, será maximizar los ingresos:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(R(t), u(t)) dt$$

$R(t)$ da la componente de ganancia por riego, que podrá ser negativa si no se cumple lo comprometido. Esta componente podría no integrar I , siendo en ese caso una restricción que se debe cumplir.

La generación hidroeléctrica será

$$H(t) = \psi(u(t))$$

Podrá considerarse que se vende esta energía $H(t)$ con ciertas condiciones de restricción, o considerarla integrando un despacho económico de cargas. En este último caso, siendo la demanda $D(t)$ y la generación térmica $T(t)$ y $G(T(t))$ el costo de generación térmica, y suponiendo pérdidas de transmisión nulas:

$$T(t) + H(t) = D(t)$$

y se trata de minimizar:

$$\int_{t_0}^{t_f} G(D(t) - \psi(u(t))) dt$$

o sea $H(t)$ sustituye, a costo cero, generación térmica.

Este problema se presenta generalmente como un problema de extremos fijos y restricciones múltiples.

Se dan las condiciones inicial $x(t_0)$ y final $x(t_f)$ del embalse.

Para su tratamiento por programación dinámica, se tomarán intervalos de tiempo $k = 0, 1, 2, \dots, N$ iguales y en ese caso $x(k)$ será el volumen embalsado al comienzo del periodo k .

$J(k)$ será el volumen de agua que llega en el periodo k . (m^3)

$E(k)$, $R(k)$, $u(k)$ son también volúmenes expresados en m^3 .

Discretizando el problema, la correspondiente ecuación de estado, será:

$$x(k+1) = x(k) + J(k) - E(k) - R(k) - u(k)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x} \qquad \underline{u} \leq u \leq \bar{u}$$

y la función objetivo a maximizar:

$$B = \sum_{k=0}^N F(D(k) - G_h(u(k)))$$

donde F nos da en cada intervalo $(k, k+1)$ el rédito que puede esperarse por aplicar el volumen $u(k)$ de agua, a generar energía eléctrica. Para desarrollar un ejemplo conceptual, pero no demasiado complicado, haremos:

$$B = \sum_{k=0}^N P(u(k))$$

Esta función P , que presentaremos en forma de tabla, tiene en cuenta los contratos normales de la generación hidroeléctrica, buen pago en las horas pico (por energía y potencia) y consecuentemente menores pagos fuera de las horas pico (sólo energía, que reemplaza a máquinas generadoras de mejor rendimiento). También puede tener en cuenta, la disminución de rendimiento cuando el salto hidráulico (pelo de agua del embalse menos cota de restitución aguas abajo), es significativamente menor que el de diseño.

Consideremos el siguiente ejemplo, donde:



$x(k)$ = volumen del embalse al final del período k
 $J(k)$ = agua que ingresa en el período k
 $u(k)$ = agua turbinada en el período k
 $P(u(k))$ = ingreso por una venta de energía $u(k)$
 $f_k(x(k))$ = beneficio que se obtiene al final de la etapa k cuando el nivel de agua es $x(k)$, habiendo operado óptimamente desde el estado inicial.

Supongamos que la función P es invariante en el tiempo, por simplicidad, y está dada por una tabla para $k = 1 \dots N$ en realidad debería ser $P_k(u(k))$.

Se trata de maximizar:

$$\sum_{k=1}^N P(u(k))$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq x(k) \leq x_{\max} \\ u_{\min} &\leq u(k) \leq u_{\max} \end{aligned}$$

La ecuación de estado es

$$x(k) = x(k-1) + J(k) - u(k)$$

damos los siguientes valores numéricos

$$N = 3$$

$$k = 1, 2, 3$$

k	$J(k)$
1	20
2	40
3	30

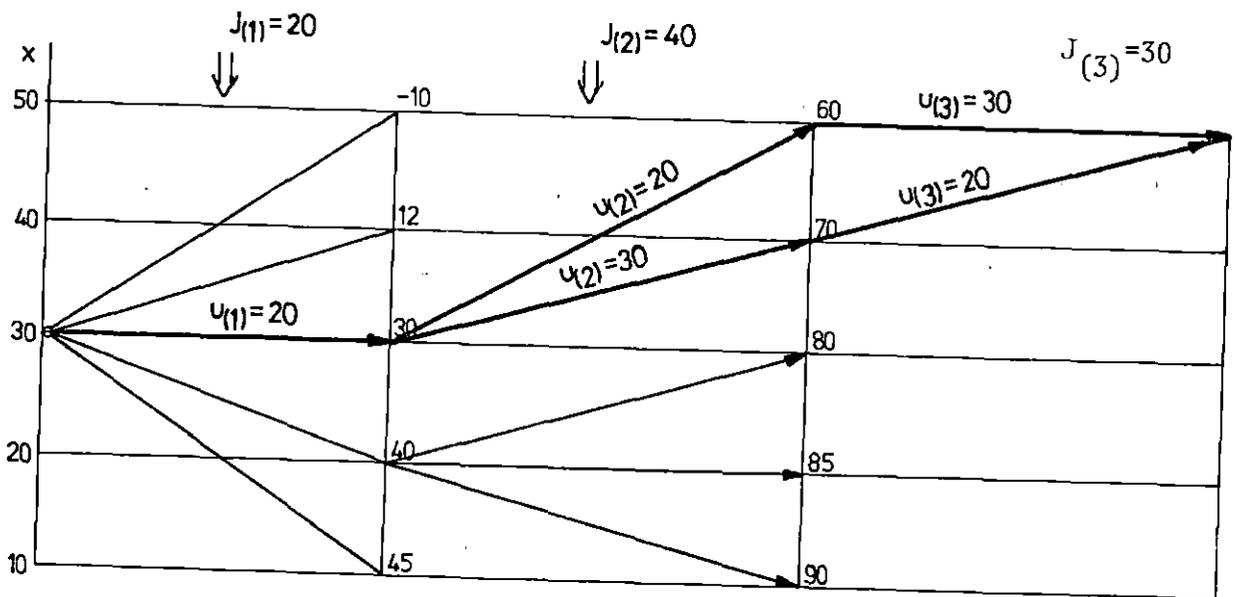
$u(k)$	$P(u(k))$
0	-10
10	12
20	30
30	40
40	45
50	50

Las restricciones serán:

$$\begin{aligned} 10 &\leq x(k) \leq 50 \\ 0 &\leq u(k) \leq 50 \end{aligned}$$

Fijamos como condiciones inicial y final:

$$\begin{aligned} x(0) &= 30 \\ x(3) &= 50 \end{aligned}$$



1) $x(0) = 30$

$J(1) = 20$

$u(1) = 0$
 $u(1) = 10$
 $u(1) = 20$
 $u(1) = 30$
 $u(1) = 40$

$x(1) = 50$
 $x(1) = 40$
 $x(1) = 30$
 $x(1) = 20$
 $x(1) = 10$

$f_1(50) = -10$
 $f_1(40) = 12$
 $f_1(30) = 30$
 $f_1(20) = 40$
 $f_1(10) = 45$

2) $J(2) = 40$

$x(2) = 50$

$x(1) = 50$
 $x(1) = 40$
 $x(1) = 30$
 $x(1) = 20$
 $x(1) = 10$

$u(2) = 40$
 $u(2) = 30$
 $u(2) = 20$
 $u(2) = 10$
 $u(2) = 0$

$f_2(50) = -10+45 = 35$
 $f_2(50) = 12+40 = 52$
 $f_2(50) = 30+30 = 60$
 $f_2(50) = 40+12 = 52$
 $f_2(50) = 45-10 = 35$

$u(2) = 20$

$f^*(50) = 60$

Efectuando el mismo análisis para $x(2) = 40$ obtenemos

$f^*(40) = 70$

$u(2) = 30$

Para $x(2) = 30$

$f_2^*(30) = 80$

$u(2) = 30$

Para $x(2) = 20$

$f_2^*(20) = 85$

$u(2) = 40$

Para $x(2) = 10$

$f_2^*(10) = 90$

$u(2) = 50$

Como el estado final es $x(3) = 50$ tenemos que determinar $f_3(50)$

Dado que $J(3) = 30$

$x(2) = 50$	$u(3) = 30$	$f_3(50) = 40+60 = 100$
$x(2) = 40$	$u(3) = 20$	$f_3(50) = 30+70 = 100$
$x(2) = 30$	$u(3) = 10$	$f_3(50) = 80+12 = 92$
$x(2) = 20$	$u(3) = 0$	$f_3(50) = 85-10 = 75$

Del estado $x(2) = 10$ no se puede partir porque no se cumple la restricción del estado final.

Hay soluciones alternativas

$$f_3^* = 100$$

con

$$u(3) = 30 \quad \text{y} \quad u(3) = 20$$

Hay dos caminos alternativos que dan un beneficio total máximo = 100

ALTERNATIVA 1	$u(1) = 20$	$u(2) = 20$	$u(3) = 30$
ALTERNATIVA 2	$u(1) = 20$	$u(2) = 30$	$u(3) = 20$

La expresión recursiva es:

$$f_k(x(k)) = \max \left\{ P(u(k)) + f_{k-1}(x(k)-J(k)+u(k)) \right\}$$

$$x_{\min} \leq x(k-1) \leq x_{\max} \quad ; \quad u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}$$

$$x_{\min} + J(k) - x(k) \leq u(k) \leq x_{\max} + J(k) - x(k)$$

Evaluated para

$$x_{\min} \leq x(k) \leq x_{\max}$$

$$f_1(x(k)) = P(x(0)+J(1)-x(k)) \quad \text{CONDICION INICIAL}$$

$$x_{\min} \leq x(k) \leq x_{\max}$$

La condición final la imponemos evaluando

$$f_N(x(N)) \quad \text{solo para} \quad x(N) = x_F$$

III.2.2 Principio del Máximo de Pontryagin (PMP) [9] , [13]

El PMP tiene una estrecha semejanza con el "principio de mínima acción" de la mecánica analítica y en cierto modo tiene su origen en la teoría de Hamilton-Jacobi.

Hay también un substrato común de este principio con el método de Lagrange y con la programación dinámica, lo que es analizado en el Anexo 4.

Resolveremos por este método, el caso planteado en el Punto anterior:

$$\underline{X}(t) = \underline{f}(\underline{X}(t), \underline{U}(t)) \quad (1)$$

definida en un intervalo $0 \leq t \leq T$ con las condiciones iniciales dadas

$$\underline{X}(0) = x_0 \quad (2)$$

y un conjunto de controles admisibles:

$$\underline{U}(t) \in \mathcal{U} \quad (3)$$

y un funcional objetivo que supondremos se quiere maximizar:

$$J = F(\underline{X}(T)) + \int_0^T f_0(\underline{X}, \underline{U}) dt \quad (4)$$

Para evitar complicaciones en los desarrollos posteriores, cuando se desee minimizar J , simplemente haremos

$$\text{máx} \quad -J = -F(\underline{X}(T)) - \int_0^T f_0 dt$$

Recordemos que planteado así este problema, no se busca el punto donde la función objetivo toma su óptimo, sino el extremo de una funcional (4). La solución no es un número, sino una función, la trayectoria $\underline{X}(t)$. Esta \underline{X} no se obtiene resolviendo simplemente la (1), ya que desconocemos la forma matemática de $\underline{U}(t)$. Una vez determinada $\underline{U}(t)$, que sea admisible según la (3) y maximice la funcional (4), se la reemplaza en el sistema de ecuaciones diferenciales (1), se lo resuelve y se obtiene así la $\underline{X}(t)$.

Escribiremos las (1) a (4) en forma explícita:

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r)$$

....

(1')

$$\frac{dx_n}{dt} = \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r)$$

$$x_1(0) = x_1^0 ; \dots ; x_n(0) = x_n^0 \quad (2')$$

$$(u_1(t), \dots, u_r(t)) \in U \quad (3')$$

$$J = F(x_1(T), x_2(T), \dots, x_n(T)) + \int_0^T f_0(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) dt \quad (4')$$

Siguiendo a Pontryagin se suele simplificar la funcional objetivo, introduciendo una nueva variable

$$x_0(t) = F(x_1(T), \dots, x_n(T)) + \int_0^t f_0(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r) dt$$

con lo que

$$\dot{x}_0(t) = f_0(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r)$$

con la condición inicial

$$x_0(0) = F(x_1(T), \dots, x_n(T))$$

y el problema del máximo queda reducido a una expresión más simple, lo que se busca es el máximo de $x_0(T)$. En determinados casos será útil recurrir a este artificio.

Procediendo en forma análoga a como se hizo en los problemas estáticos, se añade al problema (1')... (4') un vector fila de nuevas variables, una por cada una de las n ecuaciones diferenciales (1') (ofician de restricciones):

$$p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$$

Estas nuevas variables, se llaman de coestado y son los equivalentes dinámicos de los multiplicadores de Lagrange (Anexo 4.c).

Daremos directamente los pasos necesarios para la aplicación del Principio de Máximo de Pontryagin:

a) Se construye la función hamiltoniana

$$H(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; p_1, \dots, p_n) = f_0(\underline{X}, \underline{U}) + p_1 f_1(\underline{X}, \underline{U}) + p_2 f_2(\underline{X}, \underline{U}) + \dots + p_n f_n(\underline{X}, \underline{U}) \quad (5)$$

b) resultan así, los dos sistemas de n ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} ; \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} ; \dots ; \dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad (6)$$

con

$$x_1(0) = x_1^0 ; \dots ; x_n(0) = x_n^0 \quad (7)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} ; \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} ; \dots ; \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n} \quad (8)$$

con las condiciones finales:

$$p_1(T) = \frac{\partial F}{\partial x_1} ; p_2(T) = \frac{\partial F}{\partial x_2} ; \dots ; p_n(T) = \frac{\partial F}{\partial x_n} \quad (9)$$

c) La expresión del Principio del Máximo, será entonces:

Para que exista un máximo del funcional J, es necesario que siendo $\underline{U}(t)$ el control óptimo y $\underline{X}(t)$ la trayectoria de estado correspondiente a ese control óptimo, existan las funciones $p_1(t) \dots p_n(t)$ tal que se satisfaga la condición:

$$\max_{\underline{U} \in \mathcal{U}} H(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; p_1, \dots, p_n) \quad \forall t \quad 0 < t < T \quad (10)$$

Notamos que si el máximo es interior (no en el contorno de \mathcal{U}), la condición (10) significa:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 ; \dots ; \frac{\partial H}{\partial u_r} = 0 \quad \forall t \quad 0 < t < T$$

III.2.2.1. Ejercicios y aplicaciones

Sea el problema de tiempo óptimo, donde se quiere transferir al sistema, una masa dada, desde un estado inicial a uno final dados, en el tiempo mínimo.

Tendremos sólo una variable de control u y recordemos que seguiremos hablando de búsqueda del máximo, por lo que en este problema haremos $-J$, dado que buscamos un mínimo. Tendremos entonces:

$$\max_{u(t)} J = - \int_0^T dt = -(T-0) = -T$$

Si u es la fuerza aplicada a una masa unitaria

$$u = m \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} \quad (\text{fuerza} = \text{masa} \times \text{aceleración})$$

y x_1 es la distancia de la masa, a un punto dado como origen del movimiento. Llamando a $dx_1/dt = x_2 =$ velocidad del móvil, tendremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad -1 \leq u(t) \leq 1$$

y se trata de llevar el móvil desde las condiciones dada, $x_1(0) = x_1^0$; $x_2(0) = x_2^0$ al origen $(0,0)$ en un tiempo mínimo.

El Hamiltoniano es:

$$H = -1 + p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot u$$

$$\dot{p}_1 = 0 \quad ; \quad \dot{p}_2 = -p_1$$

$$p_1(t) = c_1 \quad p_2(t) = -c_1 t + c_2 \quad (c_1, c_2 = \text{ctes})$$

la u óptima, u^* , dado que en H aparece solo el término $p_2 \cdot u$ que la contiene, deberá ser:

$$u^* = 1 \quad \text{si} \quad p_2 > 0 \quad \text{y} \quad u^* = -1 \quad \text{si} \quad p_2 < 0$$

para que H sea máximo $\forall t$. 0 sea

$$u^* = \text{sgn}(p_2)$$

Como $p_2(t)$ puede cambiar de signo una sola vez, por ser lineal, la solución óptima, conmutará cuando mucho una vez el valor de u^* , de -1 a +1 ó de +1 a -1.

Veamos otro ejercicio de aplicación. [7].

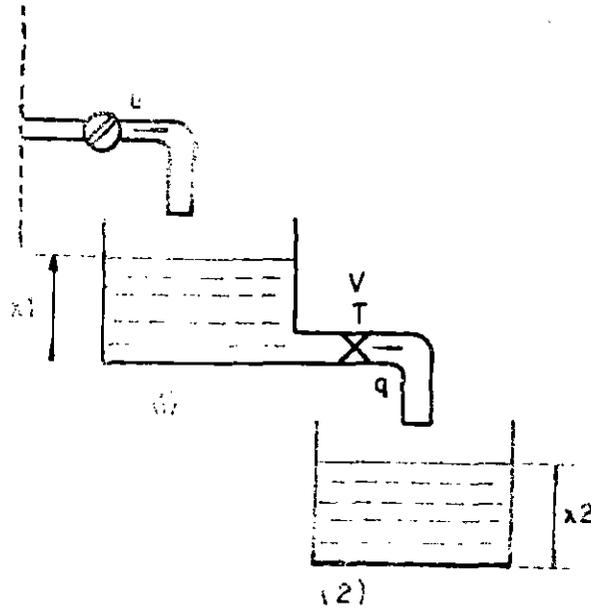


Figura III.3

Se bombea un líquido en el tanque (1), a razón de u lts/seg. Para el tanque (2), se supondrá que el caudal q es proporcional al nivel x_1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 + k_2 u \\ \dot{x}_2 = k_3 x_1 \end{cases}$$

Partiendo de ambos tanques vacíos, encontrar la estrategia óptima, u óptimo que maximice para $T=10$ segundos

$$\text{máx } J = c_1 x_1(T) + c_2 x_2(T) = x_2(T) \quad \text{con } c_1 = 0 \quad c_2 = 1$$

Haremos $k_1=k_2=k_3=0,1$

$$\dot{x}_1 = -0,1 x_1 + 0,1 u$$

$$\dot{x}_2 = 0,1 x_1$$

$$0 < u < 1 \text{ lt/seg.}$$

condición inicial

$$\begin{cases} x_1(1) = 0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$H = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1 (-0,1 x_1 + 0,1 u) + 0,1 x_1 p_2$$

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,1 p_1 - 0,1 p_2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

tomando el único término de H que contiene la u deberá ser

$$\text{máx } 0,1 u^{\#}$$

o sea si

$$p_1 > 0 \Rightarrow u^{\#} = 1$$

$$p_1 < 0 \Rightarrow u^{\#} = 0.$$

como:

$$p_1(T) = p_1(10) = 0$$

$$p_2(T) = p_2(10) = 1$$

será

$$p_2(t) = 1$$

$$p_1(t) = -e^{0,1(t-T)} + 1$$

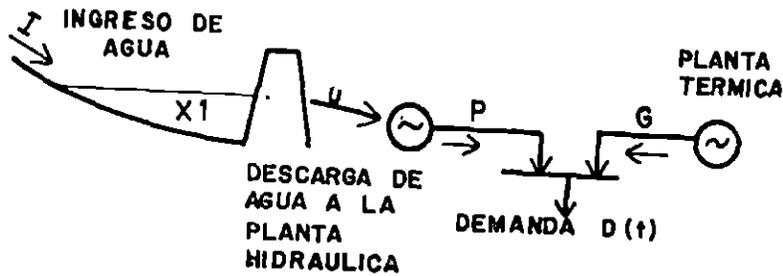
que para $t < T$ es $p_1 > 0$ o sea la solución es

$$u^{\#} = 1 \quad \forall t \quad 0 < t < T$$

lo que obviamente significa bombear a máxima capacidad de la bomba todo el tiempo.

Aplicación a un despacho económico hidrotérmico

Plantearemos las ecuaciones que permitan solucionar este problema por aplicación del Principio de Máxima de Pontryagin, esbozando su solución



La curva de demanda $D(t)$ es un dato. El sistema es provisto de energía eléctrica por dos centrales, una hidroeléctrica y otra termoeléctrica (problema visto en III.2.1.1.), conociéndose de esta última el costo de generación, el que generalmente se supone:

$$F(G) = a \cdot G + b \cdot G^2 \quad a, b = \text{ctes.}$$

De la central hidroeléctrica nos dan el ingreso de agua al embalse $I(t)$, como dato determinado.

La ecuación de continuidad nos dice que

$$\frac{dx_1}{dt} = I - u \quad (1)$$

siendo $x_1(t)$ la cantidad de agua embalsada.

Se desprecian en este caso el efecto de la evaporación o el agua que pasa por vertedero.

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$$

siendo \underline{u} , \bar{u} , el mínimo y el máximo caudal de agua a turbinar; también

$$\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1$$

La potencia hidroeléctrica será:

$$P = H_0 (1 + c \cdot x_1) u \quad (2)$$

H_0 es la altura nominal del agua y c el factor de corrección de la altura de agua por los cambios en la cantidad de agua embalsada.

$$G = D - P \quad (3)$$

Se desprecian las pérdidas en la red.

El problema del despacho económico hidrotérmico, quedará establecido en estos términos:

Dada la curva de demanda $D(t)$, las condiciones inicial y final del embalse, $x_1(0)$ $x_1(T)$, determinar el control u (agua turbinada), en modo tal que sea mínimo el costo total de combustible, integrado en el período $(0, T)$ de la central térmica. Para plantearlos como un problema de máximo, cambiaremos el signo de la integral:

$$\max J = - \int_0^T F(G) dt = - \int_0^T (a G + b G^2) dt \quad (4)$$

Haremos ahora una aclaración, en el problema (1) (2) (3) (4) no aparecía explícitamente la variable t , o sea se trataba de un sistema autónomo. En nuestro caso dado que

$$G(t) = D(t) - P$$

aparece t explícitamente en $D(t)$.

Es por ello que introduciremos una variable auxiliar $x_2=t$ con lo que nuestro sistema de ecuaciones diferenciales será:

$$\frac{dx_0}{dt} = \dot{x}_0 = - F(G) = - (a G + b G^2) \quad (5)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = I - u \quad (6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = 1 \quad (7)$$

con las condiciones iniciales:

$$x_0(0) = 0 ; x_1(0) = x_0^1 ; x_2(0) = 0$$

Nótese que la variable x_0 aparece para eliminar la integral de la

funcional, o sea

$$x_0 = - \int_0^T F(G) dt$$

Se trata ahora de determinar el control óptimo u^* que maximice

$$x_0(T) = - \int_0^T F(G) dt$$

Aplicando el PMP:

$$H = - F(G) + p_1(1-u) + p_2 \tag{8}$$

siendo

$$\frac{dp_1}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_1} = - \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial G} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} = - \frac{dF}{dG} \cdot H_0 \cdot c \cdot u \tag{9}$$

recordando que

$$G = D(t) - P = D(t) - H_0 (1 + c x_1) u$$

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_2} = - \frac{dF}{dG} \cdot \frac{dG(t)}{dt} \tag{10}$$

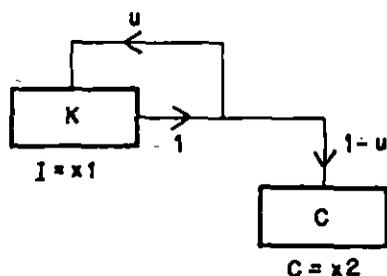
el procedimiento normal de solución será maximizar ψ t el Hamiltoniano en los términos en que aparece la u .

$$H = \dots - p_1 u \dots$$

si $p_1 < 0 \Rightarrow u^* = \bar{u}$

si $p_1 > 0 \Rightarrow u^* = \underline{u}$

Aplicación a un problema de crecimiento óptimo y asignación de inversiones



Los suscriptos 1, 2 indican los sectores de inversión y consumo respectivamente.

El sistema de producción quedará definido por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 = \theta_1 \cdot u \cdot x_1 - \lambda \cdot x_1 = (\theta_1 u - \lambda) x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \dot{x}_2 = \theta_2 (1 - u) x_1 \end{array} \right. \quad (II)$$

$$x_1(0) = I_0 \qquad x_2(0) = C_0$$

$$0 < u < 1 \qquad 0 < t < T$$

siendo:

$x_i(t)$ = stock de capital en el sector i , en el tiempo t = variables de estado.

$u(t)$ = fracción de la inversión asignada al sector 1 para el tiempo t = variable de control.

θ_i = relación producto-capital en el sector i = Parámetro.

λ = relación de obsolescencia del capital en el sector 1 = Parámetro.

Se trata de encontrar el programa óptimo de acumulación de capital en los dos sectores (inversión y consumo), modelo de crecimiento donde el único margen de decisión es la asignación de la inversión entre los dos sectores. Se supone que el capital, una vez asignado a un sector, no puede ser usado en el otro, o que la inversión es irreversible. Este modelo ha sido tratado en

profundidad por Domar, Feldman, Mahalanobis y por Bose en Review of Economics Studies (oct. 1968 pag. 465-480).

El objetivo será la maximización de la integral de la función utilidad, descontada, definida sobre el consumo corriente.

Siendo ρ = parámetro de descuento social el problema será:

$$\max \int_0^T e^{-\rho t} x_2(t) dt$$

sujeto a (11) y a que

$$\beta_1 \geq 0 ; \beta_2 \geq 0 ; \beta_1 \geq \lambda ; \beta_1 - \lambda > \rho$$

plantearemos la solución por el PMP:

es un sistema no autónomo, t aparece explícitamente por lo que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_0 = e^{-\rho t} x_2 \\ \dot{x}_1 = (\beta_1 u - \lambda) x_1 \\ \dot{x}_2 = (1-u) \beta_2 x_1 \\ \dot{x}_3 = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_0(0) = 0 \\ x_1(0) = I_0 \\ x_2(0) = C_0 \\ x_3(0) = 0 \end{array}$$

el Hamiltoniano:

$$H = e^{-\rho t} x_2 + p_1 (\beta_1 u - \lambda) x_1 + p_2 (1-u) \beta_2 x_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\dot{p}_1 = p_1 (\beta_1 u - \lambda) + p_2 (1-u) \beta_2 \\ -\dot{p}_2 = e^{-\rho t} \end{array} \right.$$

y para analizar la u^* que corresponde a la solución óptima, basta considerar los siguientes términos de H .

$$H = \dots p_1 \beta_1 x_1 u - p_2 \beta_2 x_1 u$$

como $x_1 \geq 0$ resta maximizar $\forall t$

$$(p_1 \beta_1 - p_2 \beta_2) u$$

$$\begin{array}{ll} \text{si} & p_1 \beta_1 - p_2 \beta_2 > 0 \Rightarrow u^* = 1 \\ \text{si} & p_1 \beta_1 - p_2 \beta_2 < 0 \Rightarrow u^* = 0 \end{array}$$

Analizada esta expresión $(p_1\beta_1 - p_2\beta_2)$, encontraremos un valor de $t=\tau$: $0 \leq \tau \leq T$, punto de corte para los valores de u^* , tal que

$$\forall t : 0 \leq t < \tau \Rightarrow u^* = 1$$

$$\forall t : \tau \leq t \leq T \Rightarrow u^* = 0$$

Antes de $t=\tau$, todo el capital se vuelca al sector inversión y luego de $t=\tau$ se vuelca todo al consumo.

Aunque no tan representativo de los requerimientos normales, pero más simple para su resolución matemática, nos propondremos como funcional objetivo:

$$\text{máx } I = x_2^*(T)$$

lo que significa maximizar el consumo al fin del periodo temporal en estudio. En ese caso, suponiendo

$$x_1(0) = 1 \quad x_2(0) = 0$$

$$H = p_1 (\theta_1 u - \lambda) x_1 + p_2 (1-u) \theta_2 x_1 = x_1 (p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2) u + (p_2 \theta_2 - p_1 \lambda) x_1$$

$$\begin{cases} -\dot{p}_1(t) = (p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2) u + (p_2 \theta_2 - p_1 \lambda) \\ -\dot{p}_2(t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Con las condiciones finales:

$$p_1(T) = 0 \quad p_2(T) = 1$$

Estas ecuaciones diferenciales no se pueden resolver directamente pues dependen de $u(t)$ que es desconocida.

Como el Hamiltoniano es lineal en u y dado que $x_1 > 0$, será máximo o bien con $u=0$ o con $u=1$ dependiendo de

$$p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2 > 0 \Rightarrow u^* = 1$$

$$p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2 < 0 \Rightarrow u^* = 0$$

Ahora será posible resolver el sistema (12).

En el punto $t=T$

$$p_1(T) \theta_1 - p_2(T) \theta_2 = -\theta_2 < 0$$

y por lo tanto

$$u^*(T) = 0$$

Por otra parte siendo

$$\dot{p}_2(t) = 0 \quad \text{y} \quad p_2(T) = 1$$

se sigue que

$$p_2(t) = 1 \quad \forall t$$

En un entorno suficientemente pequeño de T , la primera ecuación de (12) será:

$$-\dot{p}_1(t) = -\lambda p_1(t) + \theta_2$$

cuya solución es:

$$p_1(t) = \frac{\theta_2}{\lambda} (1 - e^{\lambda(t-T)})$$

Yendo en el tiempo de $t=T$ hacia $t=0$, $p_1(t)$ aumenta su valor que comenzó en $p_1(T) = 0$, el punto de corte del valor de $u^*=0$ cuando pasa a $u^*=1$, se producirá en

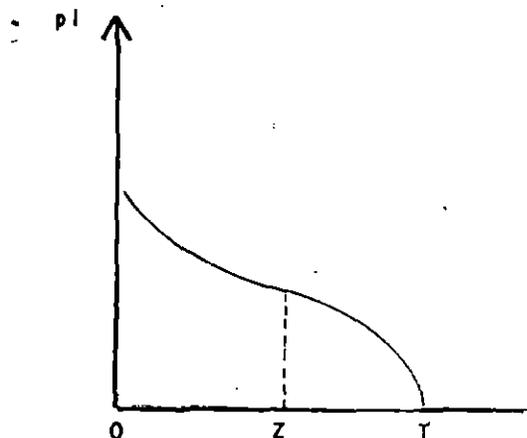
$$p_1 \theta_1 - p_2 \theta_2 = 0 \quad \text{o sea} \quad p_1 \theta_1 - \theta_2 = 0$$

$$p_1(\tau) = \frac{\theta_2}{\theta_1} \quad 0 \leq \tau \leq T \quad (13)$$

en ese punto, la ecuación diferencial (12) será:

$$-\dot{p}_1(t) = (\theta_1 - \lambda) p_1(t) \quad \text{con} \quad \theta_1 > \lambda$$

Significa que yendo hacia atrás en el tiempo, $p_1(t)$ continúa aumentando ($\dot{p}_1 < 0$), o sea no hay otro switch o punto de corte adicional para $u^*(t)$.



La solución de (13) es:

$$\tau = T + \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 - \frac{\lambda}{g_1}\right) \quad (14)$$

IV. TEORIA Y TECNICAS DE DECISION

Normalmente, en nuestra vida diaria, nos enfrentamos con problemas que requieren por nuestra parte una toma de decisión. Generalmente se trata de elegir una forma de actuar, entre varias formas alternativas posibles, digamos A_1 , A_2 , ... , y esa elección la hacemos tratando que se cumpla algún objetivo o fin determinado. Nuestras decisiones se basan en tener objetivos claros, buena información y reglas racionales, intuitivas, heurísticas o adquiridas por aprendizaje y fundamentalmente la libertad y capacidad para aplicar esas reglas.

El desarrollo de las sociedades humanas exigieron decisiones más frecuentes con objetivos múltiples, generalmente contrapuestos ya que cada uno de ellos afecta a algunos grupos sociales y favorece a otros. Surgieron así, desde el principio de la historia, los tomadores de decisión o decididores, tales como conductores políticos, sociales y religiosos y más modernamente estructuras burocráticas y dirigentes de empresa.

Definiremos algunos términos y analizaremos algunos procesos que hacen al problema de la decisión multiobjetivo.

El decididor, es la persona o grupos de personas, que tienen la responsabilidad y la autoridad para cambiar el sistema de que se trate. Son aquellos que disponen del juicio de valor final que permite ordenar las posibles alternativas en función de su "bondad".

Una unidad de decisión consiste en el decididor y un grupo de hombres y máquinas que en conjunto actúan como procesadores de información y en función de ello producen la decisión.

Un objetivo es una enunciación sobre el estado deseado del sistema en consideración, estado que procurará conseguir el decididor.

Un atributo es una cantidad cuyo valor refleja el grado de realización o logro de un objetivo, al cual el atributo está adscripto.

Los objetivos suelen presentarse en niveles de jerarquía. En el nivel superior tenemos los objetivos más globales, en cierto modo más vagos y por tanto menos operativos. Descendiendo en esa estructura de niveles de objetivos, éstos se hacen más operativos, más específicos y más susceptibles de adscribirles un atributo. Tenemos como ejemplo un modelo de planeamiento integral de los recursos agua y suelos en una cierta región. [5].

El objetivo superior sería mejorar el nivel de vida en la región, con un desarrollo adecuado de esos recursos.

A un nivel inferior aparecen por ejemplo dos objetivos: asistir al desarrollo económico aumentando la producción de bienes y servicios y mejorar la calidad del medio ambiente, preservando,

creando y mejorando la calidad de ciertos recursos naturales, culturales y sistemas ecológicos.

A otro nivel más operativo, concordante con los anteriores, aparecen objetivos del tipo: mejorar la calidad del agua, cuyo atributo podría ser la cantidad de materia orgánica y mineral máxima permitida; reducir la sedimentación, con un atributo fijado en toneladas por año como máximo.

Aun en los niveles más operativos de objetivos, no es fácil, en ciertos casos asignarles un atributo, pero generalmente se les puede asociar indirectamente un atributo sustituto. Por ejemplo a un objetivo tal como "mejorar las oportunidades de recreación" se le puede dar en forma indirecta, el atributo "número de días de recreación", entendiéndose por tal una visita de un individuo al área de desarrollo turístico y recreacional.

Reglas de decisión, son un conjunto de normas y reglas que facilitan un ordenamiento completo de las distintas alternativas.

Por ejemplo, si el objetivo es "maximizar las ganancias" y el atributo "beneficio neto medido en australes", la regla de decisión será "elegir la alternativa de máxima utilidad". Otro ejemplo, el objetivo "mejorar la calidad del agua" con su atributo "nivel de materia orgánica menos de 2 mg/litro".

Una regla de decisión podría ser "elegir cualquier alternativa que cumpla el atributo.

IV.1. ANALISIS DE DECISION UNIOBJETIVO

Se trata de encontrar procedimientos que ayuden a la toma de decisiones en los casos en que el número de alternativas es finito y se trata de optimizar solo una función objetivo, siendo por otra parte, incierto el entorno o el estado de la naturaleza.

El decididor se encuentra con:

1. Un conjunto de acciones alternativas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$
2. Un conjunto de estados de la naturaleza $S = \{S_1, S_2, \dots, S_q\}$ donde S_i es una variable aleatoria, cuya probabilidad de ocurrencia $P(S_i)$ puede conocerse.
3. Un conjunto de valor de pago $U = \{U_{11}, \dots, U_{ij}, \dots, U_{rq}\}$ en términos monetarios, en correspondencia biunívoca con el producto cartesiano $A \times S$, o sea con el conjunto de los rq pares ordenados $Q = \{(a_1, S_1) \dots (a_i, S_j) \dots (a_r, S_q)\}$. Donde $U_{ij} = w(a_i, S_j)$, siendo w la función de pago.
4. El criterio de decisión, a optimizar, $f(a_j)$, donde f es una función a valores reales, definida en A .

El problema es elegir una alternativa a_i que optimice el criterio de decisión $f(a_i)$.

Cuando hablamos de estados S_j de la naturaleza, se representan todos los factores incontrolables por el decididor, que son externos al modelo del problema. El vector Q tiene por elementos genéricos (a_i, S_j) cuya primera componente es controlable y la segunda no lo es.

La $U_{ij} = w(a_i, S_j)$ refleja la preferencia del decididor por esa dupla particular (a_i, S_j) , lo que puede ser dado en forma objetiva o subjetiva.

Un modo compacto de presentar A, S, Q, U es la matriz de pagos:

	S_1	S_2	S_q
a_1	U_{11}	U_{12}	U_{1q}
a_2	U_{21}	U_{22}	U_{2q}
.
.
a_r	U_{r1}	U_{r2}	U_{rq}

Ejemplo: Planeamiento energético

Supongamos que se ha realizado la evaluación de distintas alternativas para el equipamiento de un sistema eléctrico, en función de una demanda esperada D_1 (Ver Figura IV.1).

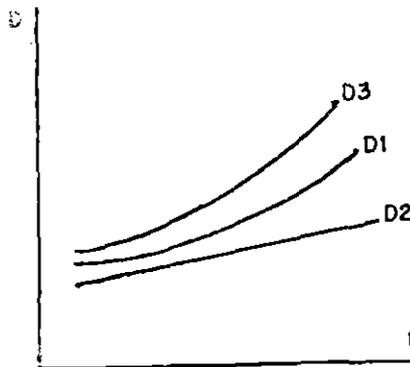


Figura IV.1.

Se ha seleccionado una alternativa A_1 que maximiza los ingresos netos a valor presente, considerando las inversiones, gastos y los ingresos por venta, en una evaluación social.

Un análisis estadístico nos indica que hay una probabilidad calculable de que la demanda sea D_1 , D_2 ó D_3 . El decididor se encuentra entonces con un conjunto de estados de la naturaleza S_1 , S_2 , S_3 que corresponden a esas demandas y de los cuales se conocen sus probabilidades de ocurrencia: $P(S_1)$, $P(S_2)$, $P(S_3)$.

Si se repite la evaluación para cada uno de esos tres casos, con el objetivo de maximizar los ingresos netos descontados, tendremos tres alternativas a_1 , a_2 , a_3 que corresponden a cada S_i .

En esas evaluaciones se han obtenido los valores de máximos ingresos que corresponden a (a_1, S_1) (a_2, S_2) (a_3, S_3) . Por otra parte, el decididor debe calcular también los valores de pago que corresponden a los pares (a_i, S_j) con $i \neq j$. Estos valores de pago, incluyen las sobreinversiones realizadas en caso de darse demandas inferiores, y los menores ingresos correspondientes, o, en el caso inverso de darse mayor demanda que la esperada, tendremos no sólo menores ingresos, sino pérdidas sociales debido al no suministro de energía.

Tabla 1

	S_1	S_2	S_3	EM
a_1	$U_{11} = 1000$	$U_{12} = 500$	$U_{13} = -100$	500
a_2	$U_{21} = 600$	$U_{22} = 1100$	$U_{23} = -20$	670
a_3	$U_{31} = 200$	$U_{32} = 400$	$U_{33} = 1200$	540
$P(S_i)$	0,3	0,45	0,25	

En la Tabla 1, se da la matriz de pagos, en una unidad económica convencional, o sea los valores $U_{ij} = w(a_i, S_j)$.

Una regla apropiada de decisión, es maximizar el valor monetario esperado o esperanza matemática.

Recordamos que si una variable aleatoria x puede tomar valores x_1 , x_2 , ..., x_n cada uno de ellos son probabilidades p_1 , p_2 , ..., p_n tales que: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$; $1 \geq p_i \geq 0$ el valor esperado o esperanza matemática de x será:

$$EM(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

El decididor eligirá, con esta regla de decisión, el curso de acción que rinda el máximo beneficio esperado.

Para a_1 , el beneficio esperado será:

$$0,3 \times 1000 + 0,45 \times 500 + 0,25 \times (-100) = 500$$

Para a_2 :

$$0,3 \times 600 + 0,45 \times 1100 + 0,25 \times (-20) = 670$$

Para a_3 :

$$0,3 \times 200 + 0,45 \times 400 + 0,25 \times 1200 = 540$$

De acuerdo con la regla de decisión especificada, la elección será a_2 .

En este ejemplo, hemos supuesto conocidas la distribución de probabilidades de los estados de la naturaleza, ya sea subjetivamente o por análisis de los datos disponibles.

En función de la dificultad en estimar estas probabilidades y condiciones subjetivas del decididor, clasificaremos los problemas de decisión.

Toma de decisión bajo certeza. Se trata del caso en que se conoce con certeza, ($P(S_i) = 1$), que sólo uno de los estados de la naturaleza ocurrirá ciertamente. Suponiendo por ejemplo $P(S_3) = 1$, el problema se reduce a encontrar:

$$\max_{1 \leq i \leq 3} U_{i3}$$

que en nuestro caso será igual a 1200 y corresponde a la elección de la a_3 .

Toma de decisión bajo riesgo. Es el caso en que se pueden estimar las $P(S_i)$, ya sea objetiva o subjetivamente. En algunos casos durante el proceso de análisis de la decisión, se obtiene información adicional que mejora la estimación original de $p(S_i)$. Este es el caso del análisis de decisión Bayesiana y las probabilidades así obtenidas se llaman probabilidades a posteriori.

Toma de decisión bajo incertidumbre. Es la situación donde no es posible estimar los $P(S_i)$ y no se pueden cuantificar los riesgos. En este caso deberá elegirse adecuadamente determinadas reglas de decisión, como veremos a continuación.

Toma de decisión bajo conflicto. Es una clase de problemas en los que el decididor se enfrenta con un oponente racional, con conflicto de intereses. Este tipo de toma de decisión, se estudia en la teoría de juegos.

IV.2. Reglas de decisión. Teoría de la utilidad

Ya hemos visto RD (reglas de decisión) para los dos primeros

casos (certeza y riesgo). En el caso del riesgo, se da otra forma de juzgar los valores, reemplazando valores monetarios por utilidad. Esto mide la preferencia del decidor en una cierta escala. La correspondiente RD, será maximizar el valor esperado de utilidad.

En este caso, la misma cantidad de dinero o beneficio monetario, puede ser valuada distintamente por diferentes individuos bajo diversas circunstancias.

Como ejemplo, supongamos dos alternativas de equipamiento energético a_1 , a_2 , con dos estados posibles de la naturaleza S_1 , S_2 , tal que $P(S_1)=0,8$ y $P(S_2)=0,2$, con esta matriz de pagos:

Tabla 2

	S_1	S_2	EM	VEU
a_1	500.000	-200.000	360.000	0
a_2	300.000	250.000	245.000	245.000
$P(S_i)$	0,8	0,2		

El beneficio esperado para a_1 será:

$$0,8 \times 500.000 + (-200.000) \times 0,2 = = 360.000$$

y para a_2 :

$$0,8 \times 300.000 + 0,2 \times 25.000 = 245.000.$$

Bajo esta RD, el decidor elegirá la alternativa a_1 .

Sin embargo puede darse la circunstancia que no se desee correr el menor riesgo de perder dinero, eventualmente porque no se dispone de él, elegirá en este caso la a_2 .

RD en caso de incertidumbre

a) Criterio maximin o regla pesimista (Abraham Wald).

En el caso de la Tabla 1, el pesimista comenzaría por analizar el peor resultado, la ganancia mínima de cada alternativa. Para a_1 es -100, para a_2 es -20 y para a_3 es 200.

a_1	-100
a_2	-20
a_3	200

Eligiendo la alternativa a_3 que tenga el mayor beneficio entre todos los mínimos (maximin), el decididor se asegura que el peor resultado que puede esperar, es al menos el mejor de todos los peores. O sea

$$\max_i \{ \min_j [U_{ij}] \} = U_{31}.$$

b) Criterio maximax o regla optimista.

En este caso, el optimista supone que el futuro le deparará un estado S_i que le brindará el mejor valor económico a la alternativa que seleccione. Por lo tanto para cada alternativa considerará la máxima ganancia

a_1	1000
a_2	1100
a_3	1200

y luego elegirá el mayor de esos valores, 1200, con lo que en este ejemplo se decidirá por la alternativa a_3

$$\max_i \{ \max_j [U_{ij}] \} = U_{33}$$

c) Criterio Laplace. Supone que las $P(S_i)$ son iguales, con lo que la RD será buscar el curso de acción que rinda el máximo beneficio esperado, calculable pues hemos supuesto los valores de los $P(S_i)$.

d) Regla de Leonid Hurwicz (coeficiente de optimismo α). $0 < \alpha < 1$
Se trata de una RD que forma una combinación lineal entre los criterios maximin y maximax. Para cada alternativa a_i , se calcula un valor

$$U_i(\alpha) = \alpha \min_j \{ U_{ij} \} + (1-\alpha) \max_j \{ U_{ij} \}$$

para un dado α , se selecciona la alternativa que maximiza $U_i(\alpha)$, o sea:

$$\max_i \{ U_i(\alpha) \}$$

Aplicado al ejemplo de Tabla 1:

$$\begin{aligned} a_1: & U_1(a) = a(-100) + (1-a)1000 = 1000 - 1100a \\ a_2: & U_2(a) = a(-20) + (1-a)1100 = 1100 - 1120a \\ a_3: & U_3(a) = a(200) + (1-a)1200 = 1200 - 1000a \end{aligned}$$

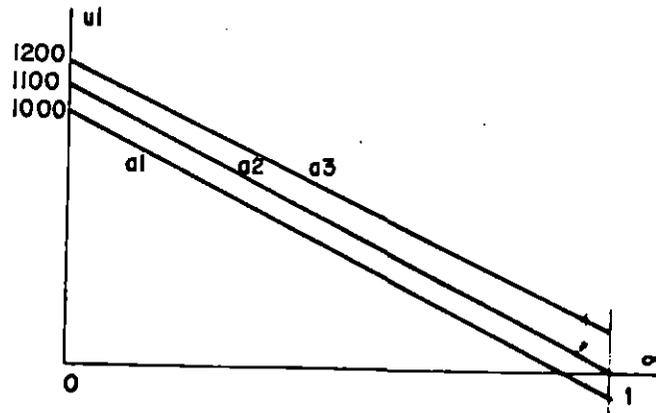


Figura IV.2

Representando las $U_i(a)$ en la Figura IV.2, vemos que la alternativa a_3 es no inferior, y para todo valor de a debe ser seleccionada por esta RD.

Teoría de la utilidad [5], [17]

Los problemas a que condujo la suposición de que la utilidad era cuantificable, en el sentido de que se le podía asociar a cada bien un número determinado, fijo, que representaba la cantidad de utilidad asociada a él, llevó a muchos economistas a realizar un análisis ordinal de la utilidad. ([17] pág. 61).

En todo proceso de decisión, se deberá establecer un orden de preferencia, en modo de poder ordenar las alternativas, para su selección.

Si el orden de preferencia se establece por ejemplo por una función económica, cuantificable en números reales, el problema queda solucionado.

Una numerosa clase de problemas de decisión, son tales que el decididor posee una estructura de preferencia, cualitativa, que al permitir construir una función de utilidad, simplifica la selección de la alternativa más conveniente.

Daremos solo algunas nociones elementales de la Teoría de la Utilidad, necesarias para entender los puntos siguientes de este capítulo, aconsejando para su profundización ver [5].

El orden de preferencia, es una relación que permite ordenar las distintas alternativas, reflejando la preferencia del decididor. Esta relación no puede ser arbitraria y debe necesariamente poseer determinadas propiedades algebraicas, que la caracterizan.

El orden de preferencia, es una relación binaria entre dos alternativas o situaciones A y B y expresaremos que:

$A \succ B$ significa que "A es preferible a B" (orden de preferencia estricto).

$A \sim B$ significa que "A es indiferente a B" (orden indiferente).

$A \succeq B$ significa que "A es al menos tan preferible como B" (orden de preferencia-indiferencia).

Partiendo de la relación \succ , podemos definir las otras dos:

$$1. \quad A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad A \succeq B \quad \text{y} \quad B \succeq A$$

$$2. \quad A \succ B \quad \Leftrightarrow \quad A \succeq B \quad \text{y} \quad \text{no se cumple} \quad B \sim A$$

La habilidad del decididor está en construir en forma directa o indirecta una relación \succ entre sus alternativas.

Sea $X = \{a, b, c\}$ el conjunto de todas las alternativas admisibles. Si R es una relación binaria entre sus elementos, diremos que:

R es transitiva si aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

R es reflexiva si aRa .

R es simétrica si $aRb \Rightarrow bRa$.

R es antisimétrica si aRb y $bRa \Rightarrow a=b$ (a y b idénticas).

R es completa (o conectiva) si $\forall a, b \in X \quad aRb \text{ ó } bRa$.

Para que R sea una relación de orden, debe ser al menos transitiva. En ese caso, si además es:

- reflexiva, se llama de preorden (quasi-orden)
- reflexiva y completa, R es de orden débil
- antisimétrica, reflexiva y completa, R es de orden lineal
- si es no reflexiva, R es de orden parcial estricto.

El tipo de orden \succsim , dependerá del problema que se está estudiando.

Si \succsim es una relación de orden débil, diremos que las alternativas a y b están en la misma clase de indiferencia, si y sólo si $a \succsim b$ y $b \succsim a$ (a es indiferente a b). Si además \succsim es un orden débil, la relación \sim es reflexiva, simétrica y transitiva, o sea las clases de indiferencia son clases de equivalencia que particionan a X en clases numerables $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$.

En este caso se demuestra fácilmente que existe una función a valores reales, llamada función de valor, v , definida en X , tal que $\forall a, b \in X$:

$$a \succsim b \quad \text{sí} \quad v(a) \geq v(b)$$

o sea que:

$$a \succ b \quad \text{sí} \quad v(a) > v(b)$$

y

$$a \sim b \quad \text{sí} \quad v(a) = v(b)$$

Funciones de valor aditivas

Lo visto se aplica tanto a problemas de decisión uniobjetivo como multiobjetivo. En este último caso, deberá construirse una función de valor multivariable $v(x_1, \dots, x_n)$, lo que suele ser dificultoso. En algunos casos se puede construir una función de valor para cada atributo y combinar los resultados aditivamente. En ese caso hablaremos de estructura aditiva.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n conjuntos de posibles valores de n atributos correspondientes a n objetivos, y sea $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Una alternativa particular será la n -upla ordenada:

$$\underline{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

siendo x_i un valor de X_i .

Si una estructura de preferencia se puede representar por una función de valor, diremos que es aditiva si y sólo si:

$$v(\underline{X}) = v_1(x_1) + v_2(x_2) + \dots + v_n(x_n)$$

Esto se dará, por ejemplo, si cada x_i es independiente de los restantes atributos.

Caso de incertidumbre

En muchos problemas de decisión, como hemos visto, los resultados de seleccionar determinadas alternativas, dependen no solo de cada una de ellas, sino del estado futuro de la naturaleza, que por definición no está bajo el control del decididor.

La incertidumbre aparece al no conocer qué estado de la naturaleza aparecerá.

El problema de toma de decisión, en el caso de incertidumbre, tendrá los siguientes elementos:

1. Un conjunto A de alternativas o acciones, a disposición del decididor para realizar determinada tarea. Las $a_i \in A$ son mutuamente excluyentes.
2. Un conjunto $S = \{S_1 \dots S_n\}$ de estados de la naturaleza, de los que no se posee a priori conocimiento de cuál estado prevalecerá.
3. Un conjunto de consecuencias $X = \{X_1 \dots X_n\}$, tal que cada una es el resultado de que ocurra S_i habiéndose elegido la acción a_j será $X_i = f(a_j, S_i)$ o sea ...

$$A \times S \longrightarrow X$$

Estas consecuencias generalmente son pagos a determinadas satisfacciones.

4. El conjunto de consecuencias X , puede también considerarse como el producto cartesiano: $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ con $X = (x_1 \dots x_n) \in X$ siendo x_i los atributos que pertenecen a X_i , correspondientes a uno de los objetivos

El problema de decisión, consiste en seleccionar una alternativa o acción, que produzca la mayor satisfacción de acuerdo con una regla de decisión RD prescripta. Hemos visto algunos casos en el Punto IV.1.

Supondremos en adelante, que es posible determinar la distribución probabilística de S y que se ha definido una relación de orden de preferencia \succsim en el conjunto $A = \{a_1 \dots a_n\}$. Deberá analizarse, cuando será posible representar ese orden de preferencia por una función a valores reales V , definida en el conjunto A , tal que $\forall a_i, a_j \in A$

$$a_i \succsim a_j \quad \text{si y sólo si} \quad V(a_i) \geq V(a_j)$$

V es la llamada función de utilidad.

Principio de Bernoulli

Sea $P(s)$ la distribución de probabilidad de $s \in S$, se podrá entonces elegir una alternativa o acción a^* , que maximice la expectativa de $u(a,s)$, es decir:

$$EM(a^*) = \max_{a \in A} \sum_{s \in S} P(s) u(a,s)$$

por lo tanto podremos definir la función de utilidad que representa la utilidad esperada de una alternativa a , como

$$U(a) = \sum_{s \in S} p(s) \cdot u(a,s)$$

IV.3. Decisión multiobjetivo

Los problemas de decisión multiobjetivo (PDM), quedan caracterizados por:

- ① Un conjunto A de alternativas definidas en términos de las variables de decisión, más que ser simplemente dadas en una lista de alternativas.
- ② Los criterios sobre los que se basarán las decisiones, son dados en términos de funciones multiobjetivos, que son a su vez funciones de las variables de decisión.

Estos PDM, aparecen naturalmente en el planeamiento y diseño de grandes sistemas complejos.

Para describir un PDM, se necesita especificar claramente:

- a) La unidad de toma de decisión (UTD), uno de cuyos componentes es el decididor.
- b) Un conjunto de objetivos y sus jerarquías.
- c) Un adecuado conjunto de atributos y definir las relaciones objetivo-atributo.
- d) Explicitar la situación de decisión (SD).
- e) Las reglas de decisión (RD).

La "salida" de un PDM, es una decisión. Las "entradas" consisten

en indicar a la UTD, que se requiere una decisión y los datos requeridos para completar una descripción de la situación de decisión (SD).

Para especificar una SD, se requiere fundamentalmente:

- Un conjunto de alternativas X , conjunto de vectores n -dimensionales de las variables de decisión $\underline{X}=(x_1, \dots, x_n)$. Una alternativa queda completamente especificada, dando el valor de \underline{X} .
- Un conjunto de reglas $f_1(x_1 \dots x_n)$; $f_2(x_1 \dots x_n)$; ... $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ por medio de las cuales, para una dada alternativa \underline{X} , se evalúan los valores de cada atributo f_1, \dots, f_n .
- Una descripción de las condiciones externas, certidumbre, incertidumbre con o sin distribución de probabilidad conocida.

Se puede expresar entonces un PDM:

Dadas las condiciones externas, resolver

$$\begin{array}{l} \text{RD} [f_1(\underline{X}), \dots, f_n(\underline{X})] \\ \underline{X} \in X \end{array}$$

que significa aplicar la regla de decisión para elegir la mejor alternativa de acuerdo con el valor de los atributos f_1, \dots, f_n .

Tabla 3

X	$f_1(\underline{X})$	$f_2(\underline{X})$	$f_n(\underline{X})$
1	$f_1(1)$	$f_2(1)$	$f_n(1)$
2	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_n(2)$
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
r	$f_1(r)$	$f_2(r)$	$f_n(r)$

Ejemplo 1

Se explicitan las alternativas $X = \{1, 2, \dots, r\}$. La variable de decisión es un entero entre 1 y r . Los estados de la naturaleza son inciertos pero con una distribución probabilística conocida. Para un dado X y un estado S de la naturaleza, se obtienen el valor de cada f_j $j=1, \dots, n$, de por ejemplo una tabla como la 3.

RD Paso 1: Adoptar la existencia de una función de utilidad multiatributo.

Paso 2: Elegir una alternativa que posea el máximo valor esperado de utilidad. (Pueden darse otras reglas como hemos visto en 1: pesimista, optimista, Hurwicz, etc.).

Ejemplo 2

Tal como el ejemplo 1, salvo que no conocemos el estado de la naturaleza con certeza.

Una RD podría ser "Elegir una alternativa X , que minimice f_1 manteniendo los valores f_2, \dots, f_n por debajo de un standard f_2^0, \dots, f_n^0 , lo que es equivalente a:

$$\min_{X \in X} f_1(x_1, \dots, x_n)$$

sujeto a

$$\begin{cases} f_2(x_1, \dots, x_n) \leq f_2^0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \leq f_n^0 \end{cases}$$

En el caso de un planeamiento eléctrico donde la f_1 significa el costo total actualizado de las obras, su operación y mantenimiento; f_2 las erogaciones en divisas; f_3 cantidad de limo depositado en los embalses, se buscará el costo total mínimo pero manteniendo f_2 y f_3 bajo niveles prefijados. O sea, en este caso, no minimizamos las tres funciones objetivo.

Ejemplo 3

El conjunto de alternativas es

$$X = \{X : X \in R^n, g_i(X) \leq 0, i=1, 2, \dots, m\}$$

X es un vector n -dimensional y g_i es una función a valores reales. Se conoce con certeza los estados de la naturaleza.

RD Paso 1: Se trata de minimizar cada f_1, \dots, f_n , individualmente.

Paso 2: Si existe una alternativa que tenga los más bajos valores para cada f_1, \dots, f_n , seleccionarla.

Paso 3: Si no existe esa alternativa, elegir una no inferior o Pareto-óptima y que más satisfaga al decididor.

Esto nos lleva a la teoría de la optimización vectorial, que se verá en el Punto IV.4.

El paso 3 puede ser también modificado de la siguiente forma: Supongamos que la estructura de preferencia del decidor, está caracterizada por una función de utilidad multiatributo

$$U[f_1(\underline{X}), \dots, f_n(\underline{X})].$$

Elegir una alternativa no inferior que maximice U , lo que es equivalente a resolver:

$$\max_{\underline{X} \in X} U[f_1(\underline{X}), \dots, f_n(\underline{X})]$$

Se puede desarrollar un procedimiento que resuelva (1) y (2) iterativa e interactivamente.

IV.4. Optimización vectorial. Optimo Paretiano.

Una clase importante de problemas de decisión multiobjetivo, son los problemas de optimización vectorial POV, o de optimización multiobjetivo. Corresponde ésto al ejemplo 3 del Punto anterior IV.3.

Las soluciones de los POV, son conocidos como no inferiores, soluciones no dominadas o Pareto-óptimas..

El concepto de no inferioridad, fue introducido a fines del siglo pasado por el economista Vilfredo Pareto ([17] pág. 252).

Las condiciones paretianas de optimalidad, pueden ser enunciadas de este modo:

La distribución de bienes de consumo, entre consumidores, es eficiente si cada posible reasignación de bienes entre ellos, implica una reducción de la satisfacción de al menos uno de ellos. Obsérvese que esta condición no supone ningún juicio acerca del grado de satisfacción relativa que logra cada consumidor. Esto ocurre dado que el planteo original es cualitativo, no cuantitativo (espacio afin de estados) y no es posible comparar los niveles de utilidad de los distintos individuos entre sí

Solución no inferior

Sea $\underline{X}=(x_1, \dots, x_n)^T$ un vector columna de las variables de decisión x_i . Las restricciones se representan por $g_i(\underline{X})$, $i=1, \dots, m$, funciones a valores reales. El espacio de las decisiones o región factible o admisible del sistema, estará caracterizado por el conjunto

$$X = \{ \underline{x} : g_i(\underline{x}) \leq 0, i=1, \dots, n \} \quad (1)$$

$f_j(\underline{x})$ es la función a valores reales definida en X , que representa el j -ésimo atributo (función objetivo o criterio de decisión).

Para simplificar las notaciones, la función multiobjetivo se denotará por:

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})) \quad (2)$$

que evidentemente es una función vectorial.

El espacio de objetivos corresponde al conjunto

$$F = \{ \underline{f}(\underline{x}) : \underline{x} \in X \} \quad (3)$$

El POV se formulará así:

$$\min_{\underline{x} \in X} [f_1(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x})] \quad (4)$$

y la solución consistirá en encontrar su conjunto de soluciones no inferiores, primer paso para resolver el problema de decisión multiobjetivo.

El concepto de soluciones no inferiores o no dominadas, se basa en la así llamada estructura de dominación:

diremos que \underline{x}^1 domina a \underline{x}^2

$$\underline{x}^1 \succ \underline{x}^2 \quad \text{sí} \quad v(\underline{f}(\underline{x}^1)) \succ v(\underline{f}(\underline{x}^2)) \quad (5)$$

donde v es la función de valor.

Definición: Se dirá que \underline{x}^* es una solución no inferior del POV, si no existe ninguna \underline{x} admisible ($\underline{x} \in X$), tal que

$$\underline{f}(\underline{x}) \leq \underline{f}(\underline{x}^*)$$

lo que significa que

$$f_j(\underline{x}) \leq f_j(\underline{x}^*) \quad \forall j=1, \dots, n$$

con desigualdad estricta para al menos un j .

El conjunto de todas las soluciones no inferiores del POV, se notará X^* , y el conjunto no inferior $\{ \underline{f}(\underline{x}) : \underline{x} \in X^* \}$ por F^* .

Intuitivamente, la alternativa \underline{x}^* en X es no inferior, si y sólo si, no podemos encontrar ninguna otra alternativa \underline{x} en X , tal que

alguna función objetivo en \underline{x} mejore (es decir disminuya) respecto de la en \underline{x}^* , sin degradar o empeorar por lo menos una de las otras funciones objetivo.

Ejemplo 1

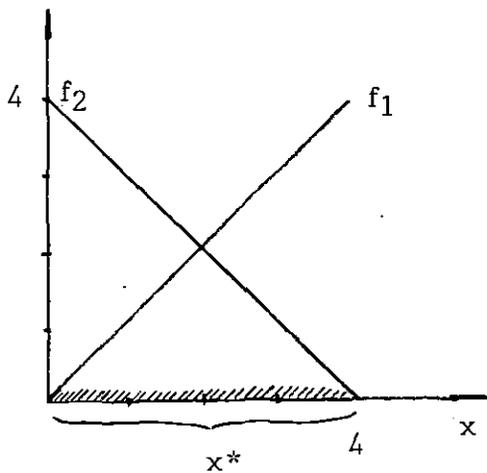
$$\min_x [f_1(x), f_2(x)]$$

sujeto a

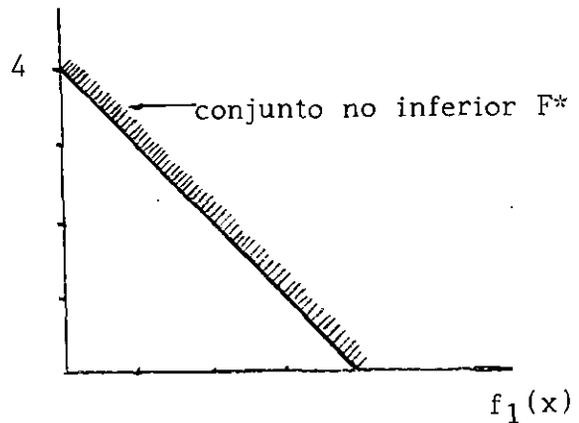
$$4 \geq x \geq 0$$

siendo

$$f_1(x) = x ; \quad f_2(x) = 4 - x$$



(a) espacio de decisión



(b) espacio de objetivos

Figura IV.3

En la Figura IV.3.a), se ve la solución de este POV. Obsérvese el segmento rayado de x , $(0,4)$, cualquier punto de ese intervalo, por ejemplo el $x=2$, es una solución no inferior, pues cualquier otro punto, digamos $x=3$, mejora la $f_2(x)$ pero desmejora la $f_1(x)$.

En la Figura IV.3.b), se representan los valores $(f_1(x^*), f_2(x^*))$ en el espacio de objetivos, o sea F^* .

Ejemplo 2

$$\min_x [f_1(x), f_2(x)]$$

sujeto a

$$x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

siendo

$$f_1(x) = x - 1 \quad ; \quad f_2(x) = (x-3)^2 + 1$$

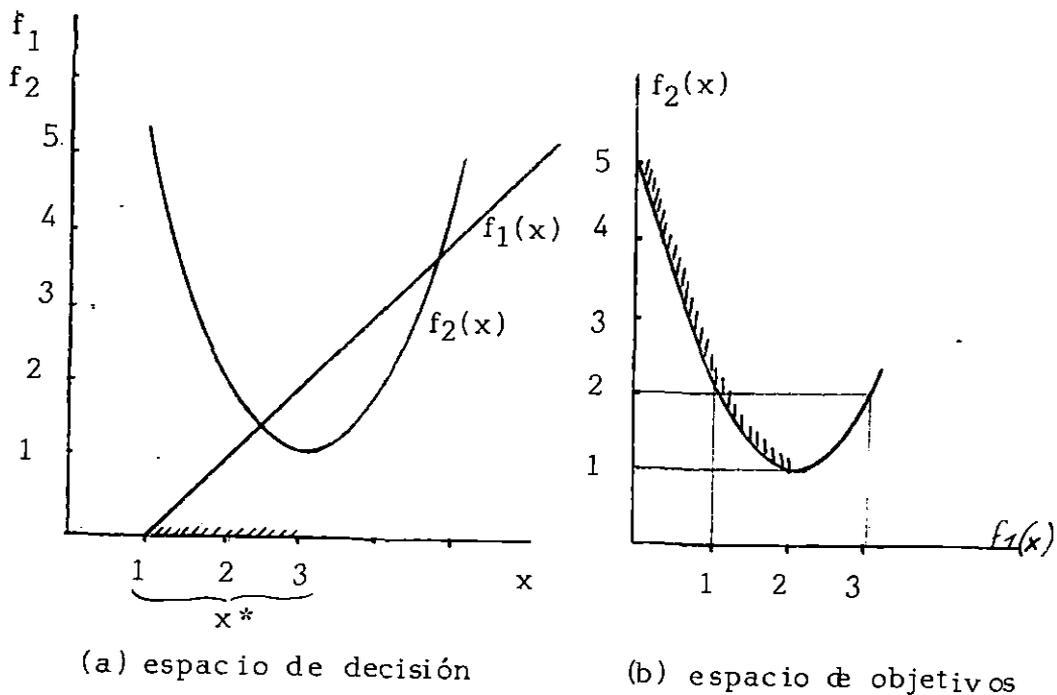


Figura IV.4

Todo x^* tal que $1 \leq x^* \leq 3$ es una solución no inferior de este POV, ya que en ese intervalo, cuando $f_1(x)$ disminuye su valor, $f_2(x)$ lo aumenta.

Entonces

$$X^* = \{x : 1 \leq x \leq 3\} \quad F^* = \{f : f = (f_1, f_2), f_2 = (f_1 - 2)^2 + 1, 0 \leq f_1 \leq 2\}$$

Todo punto $y \notin X^*$ es una solución inferior pues existe al menos un $x \in X^*$ que mejora la f_1 y la f_2 .

Transformación de un PQV en uno de optimización escalar

Para operacionalizar el concepto de soluciones no inferiores, uno de los métodos más utilizados es caracterizar esas soluciones en términos de soluciones óptimas de problemas de optimización escalar. Veamos algunos procesos:

1. Problema por pesos:
Sea

$$W = \{ \underline{w} : \underline{w} \in \mathbb{R}^n, w_j \geq 0 \text{ y } \sum_{j=1}^n w_j = 1 \}$$

el conjunto de pesos no negativos. El problema se define así:

$$\min_{\underline{x} \in X} \sum_{j=1}^n w_j f_j(\underline{x}) \quad (6)$$

2. Problema Lagrangiano del k-ésimo objetivo: Elegido un objetivo k:

$$\min_{\underline{x} \in X} [f_k(\underline{x}) + \sum_{j \neq k} u_j f_j(\underline{x})] \quad (7)$$

donde

$$\underline{u} \in (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_n)^T : u_j \geq 0 \quad \forall j \neq k$$

3. Problema del k-ésimo objetivo ϵ -restringido:

$$\min_{\underline{x} \in X} f_k(\underline{x}) \quad (8)$$

sujeto a

$$f_j(\underline{x}) \leq \epsilon_j \quad j=1, \dots, n \quad j \neq k \quad (9)$$

donde

$$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_n)^T$$

En el método 1, se han dado pesos distintos a cada objetivo.

En el método 2, se elige la función objetivo que se considera más importante, y a las restantes se las toma como restricciones siendo la (7) la correspondiente lagrangiana de este problema

modificado.

En el método 3, prevalece una función objetivo sobre el resto, a las que considera también como restricciones de desigualdad, acotándolas con un máximo ϵ_j para cada una de ellas.

Ejemplo 3: Sea el problema de optimización lineal multiobjetivo:

$$\min (f_1(\underline{X}), f_2(\underline{X})) \quad (11)$$

con

$$\begin{aligned}
g_1(\underline{X}) &: x_2 \leq 5 \\
g_2(\underline{X}) &: x_1 + x_2 \leq 6 \\
g_3(\underline{X}) &: 2x_1 + x_2 \leq 9 \\
g_4(\underline{X}) &: x_1 \leq 4 \\
g_5(\underline{X}) &: -x_1 \leq 0 \\
g_6(\underline{X}) &: -x_2 \leq 0
\end{aligned} \quad (12)$$

donde

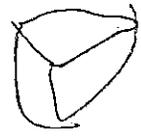
$$f_1(\underline{X}) = -x_1 - 2x_2 \quad f_2(\underline{X}) = -3x_1 - x_2 \quad (13)$$

lo resolveremos tomando los pesos $w_1 > 0$, $w_2 > 0$ tal que $w_1 + w_2 = 1$ y aplicaremos las condiciones de Kuhn-Tucker al problema

$$\min f(\underline{X}) = w_1 f_1(\underline{X}) + w_2 f_2(\underline{X}) = -x_1 (w_1 + 3w_2) - x_2 (2w_1 + w_2)$$

estas condiciones (ver Anexo 1.b)), establecen que en el punto óptimo \underline{X}^* deberá cumplirse

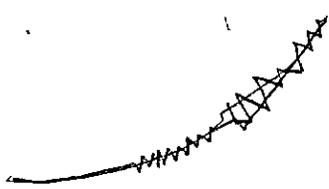
$$\nabla f(\underline{X}^*) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i^* \nabla g_i(\underline{X}^*) = \underline{0}$$



$$\lambda_j g_j(\underline{X}^*) = 0$$

$$\forall j = 1, \dots, 6$$

vale decir:



$$\begin{aligned}
 -w_1 - 3w_2 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5 &= 0 \\
 -2w_1 - w_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6 &= 0 \\
 \lambda_1 (x_2 - 5) &= 0 \\
 \lambda_2 (x_1 + x_2 - 6) &= 0 \\
 \lambda_3 (2x_1 + x_2 - 9) &= 0 \\
 \lambda_4 (x_1 - 4) &= 0 \\
 \lambda_5 x_1 &= 0 \\
 \lambda_6 x_2 &= 0 \\
 \lambda_i &\geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 6
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

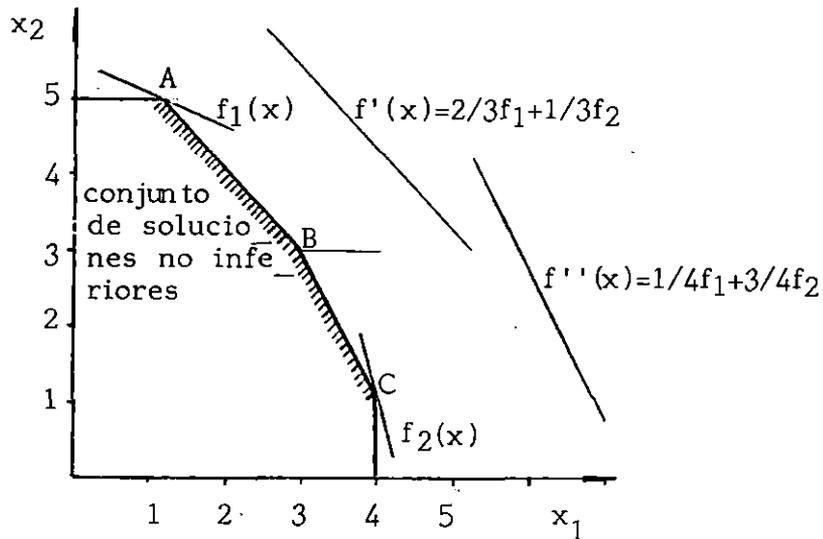


Figura IV.5

Si se tratara de minimizar

$$f_1(\underline{x}) = -x_1 - 2x_2$$

la solución sería el punto

$$A = (1, 5) \quad \text{con} \quad f_1(\underline{x}^*) = -11$$

Si fuese a minimizar

$$f_2(\underline{x}) = -3x_1 - x_2$$

la solución sería,

$$C = (4, 1) \quad \text{con} \quad f_2(\underline{x}^*) = -13.$$

Al dar los pesos intermedios w_1 , w_2 tendremos un haz de direcciones combinación de las f_1 y f_2 . Este haz

$$w_1 f_1 + w_2 f_2$$

será tangente al poliedro convexo en A, en AB, en BC y en C.

Si es tangente en AB, la única restricción activa es la $g_2(\underline{X})$, entonces por (14)

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

y como $w_1 + w_2 = 1$ será

$$w_1 = 2/3 \quad w_2 = 1/3 \quad z = 5/3$$

Todo punto del segmento AB, es una solución no inferior.

Por un análisis similar, cuando es tangente en BC,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$$

$$w_1 = 1/4 \quad w_2 = 3/4$$

También todo punto del segmento BC es una solución no inferior. El conjunto X^* de soluciones no inferiores de este problema, es AB, BC y debe ser

$$1/4 \leq w_1 \leq 2/3 \quad ; \quad 1/3 \leq w_2 \leq 3/4$$

Negociación (trade-off)

El generar soluciones no inferiores, es solo el primer paso en el proceso de decisión multiobjetivo, lo que lo acota a un número decididamente menor de soluciones posibles.

El siguiente paso será seleccionar la "mejor" de las alternativas no inferiores. Esto significa ordenar estas alternativas en un orden completo.

Con la sola relación \succ , en el espacio euclídeo n-dimensional, sólo obtenemos un orden parcial, lo que podemos ver en los ejemplos anteriores si tratamos de ordenar los conjuntos X^* , solamente con una base matemática. Debemos para ésto, hacer uso de una nueva relación de orden, una relación de preferencia, que refleje la estructura de preferencia del decididor. Evidentemente esto implica un alto grado de subjetividad y muchas veces se producen inconsistencias y aun errores.

Haremos una rápida referencia al método basado en la negociación (trade-off), que es interesante como ejemplo de un método interactivo entre el decididor y el analista.

Una negociación es un intercambio, dar una ventaja o un beneficio de modo de acceder a otro considerado más deseable.

Cuando hay más de dos objetivos, se distingue entre negociación (transacción) total y parcial.

Dadas dos alternativas factibles \underline{X}^0 y \underline{X}^* , los correspondientes niveles de objetivos son:

$$f(\underline{X}^0) = (f_1(\underline{X}^0) \dots f_n(\underline{X}^0)) \quad \text{y} \quad f(\underline{X}^*) = (f_1(\underline{X}^*), \dots, f_n(\underline{X}^*))$$

respectivamente.

Llamaremos tasa de transformación entre f_k y f_j a

$$T_{kj}(\underline{X}^0, \underline{X}^*) = [f_k(\underline{X}^0) - f_k(\underline{X}^*)] / [f_j(\underline{X}^0) - f_j(\underline{X}^*)]$$

Definición: Se dirá que $T_{kj}(\underline{X}^0, \underline{X}^*)$ es una transformación parcial, que implica a f_k y f_j , entre \underline{X}^0 y \underline{X}^* , si

$$f_i(\underline{X}^0) = f_i(\underline{X}^*) \quad \forall \quad i=1, \dots, n; \quad i \neq k; \quad i \neq j$$

Definición: Se dirá que $T_{kj}(\underline{X}^0, \underline{X}^*)$ es una transformación total, que implica f_k y f_j , entre \underline{X}^0 y \underline{X}^* , si

$$\exists i \text{ con } i \neq k; \quad i \neq j \quad \text{tal que} \quad f_i(\underline{X}^0) \neq f_i(\underline{X}^*)$$

Para aclarar estos términos, daremos un ejemplo, elaborado por Reid y Vemuri (Journal of the Franklin Institute 291, págs. 241-254-1971). Se trata de la construcción de una presa para aprovechamientos múltiples. Se optó por tres criterios de decisión que llevaron a los siguientes objetivos principales:

- minimizar el costo de construcción f_1 (\$)
- minimizar la pérdida de agua f_2 (volumen/año)
- maximizar la capacidad total de embalse del reservorio f_3 (Hm^3).

Un análisis indicó que estos tres criterios de decisión dependían especialmente de dos variables:

- x_1 = número total de horas hombre necesarias para construir la presa
- x_2 = radio medio del lago de embalse (en millas). Se estableció que:

$$f_1(x_1, x_2) = e^{0,01x_1} x_1^{0,02} x_2^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0,5 x_2^2$$

$$f_3(x_1, x_2) = e^{0,005x_1} x_1^{0,001} x_2^2$$

Se eligieron tres alternativas posibles A, B, C, ver Tabla 4.

Tabla 4

Alternativa	Variables de decisión		Funciones Objetivo		
	x_1	x_2	Costo f_1	Pérdida de Agua f_2	Capac. de Almac. f_3
A	0,7	22,36	500	250	500
B	116,19	44,72	7.029	1.000	3.750
C	172,95	44,72	12,500	1.000	5.000

Las correspondientes tasas de transformación entre pares de alternativas, A/B; A/C; B/C, se dan en la Tabla 5.

Tabla 5

Valores de transacción

	f_1/f_2	f_1/f_3
A/B	8,7	2,0
A/C	16,0	2,7
B/C	∞	4,4

Para elegir entre A, B, C, se las compara con un juicio de valor subjetivo de las transacciones y de los niveles de las funciones objetivo.

Las transacciones entre A y B y entre A y C son del tipo de transacciones totales, desde que las transacciones no nulas, se producen para ambos pares f_1/f_2 y f_1/f_3 .

Entre B y C, la transacción es parcial, pues $f_1/f_2 = \infty$

Solo como ejemplo calcularemos el valor de A/B para f_1/f_2 , por Tabla 4

$$\frac{7029-500}{1000-250} = 8,70$$

y el de A/C para f_1/f_3

$$\frac{12500-500}{5000-500} = 2,66$$

Aunque en nuestro caso es simple seleccionar, pues hay sólo tres alternativas, veamos como se conduce iterativamente el proceso de decisión: Partiendo de un punto inicial

$$\underline{x}^0 = (x^0_1, x^0_2) = (0,7; 22,36)$$

nuestro objetivo es encontrar un punto \underline{x}^1 que es preferible para el decidor, sobre el punto \underline{x}^0 . Esto significa elegir una dirección, según la cual moverse. Para ello hay que saber como varían los niveles de las f_1 , f_2 y f_3 . Aquí resulta útil el concepto de transacción (trade-off). Los valores de la transacción dependen de la dirección en la que nos movemos en el plano x_1, x_2 . Por ejemplo, partiendo de \underline{x}^0 según las direcciones

$$\underline{d}_1 = (0,98 \ 0,19); \quad \underline{d}_2 = (0,99997 \ 0,00798) \text{ y } \underline{d}_3 = (1, 0)$$

en la Tabla 6, se dan los valores de transacciones.

Tabla 6

Tasa de transacción

Dirección	f_1/f_2	f_1/f_3
\underline{d}_1	5,31	1,46
\underline{d}_2	81,00	1,96
\underline{d}_3	∞	2,01

Las tasas según \underline{d}_1 y \underline{d}_2 son tasas de transacción total y según \underline{d}_3 parcial.

Intuitivamente, el término transacción implica en la toma de decisiones, que un factor debe ser sacrificado en modo de tener otro.

Valoración metodológica

Uno de los principales problemas de la decisión multiobjetivo, es el proceso de valoración de las preferencias del decidor. Luego de explicitadas las funciones objetivo y sus atributos, que serán variables de decisión, se debe explicitar el conjunto de alternativas. Por último, el resultado final, la mejor solución de "compromiso", se podrá obtener si se ha logrado hacer una razonable medición de la estructura de preferencias. Esto significa construir un modelo de la estructura de preferencia del decidor.

Los métodos que veremos, están orientados más a los resultados que al proceso de toma de decisiones.

Veremos dos métodos de valoración:

a) **Valoración directa**

Se basa en la premisa de que la preferencia del decidor se puede cuantificar, medir y representar en forma de una función a valores reales, llamada función de utilidad o función de valor multiatributo.

Una vez construida tal función que representa la estructura de preferencia global, el proceso de toma de decisión se reduce a un proceso ya conocido de evaluación y búsqueda.

Se debe tener en cuenta que no siempre existe una apropiada función de preferencia. La teoría de la utilidad, en determinados casos, puede no resultar adecuada para describir el comportamiento humano de la toma de decisión, dando lugar a algunas paradojas.

Como ejemplo, citemos que uno de los medios más simples para obtener una función de valor unidimensional, $v_i(x_i)$ es pedirle al decidor que valore directamente v_i para cada x_i . Esto es simple, si x_i es discreta. Por ejemplo los distintos tipos de generadores a seleccionar en un programa de expansión.

autogera dores	térmica convenc.	nuclear	carbón	turbinas de gas	hidroe- léctrico
0	1	2	3	4	5

El decidor ordenará estos distintos tipos de generación según sean más o menos deseables, según una escala de preferencias.

Se supondrá generalmente, que v_i es monótona, o sea a mayor valor de x_i , mayor valor de v_i .

Si x_i es continua, el proceso es similar. Si en un programa de expansión energética, se estima que su costo puede variar entre 50 y 200 millones de dólares, se podrá asignar por ejemplo a estas cifras los valores de 90 y 50, la preferencia decrece con el aumento del costo. Para costos intermedios, se puede tomar una interpolación lineal.

b) **Método lexicográfico**

Es un método de eliminación secuencial.

La idea es muy simple: Se pide al decidor que ordene los atributos en términos de su importancia, X_1, \dots, X_n .

El primer atributo X_1 , será usado como cedazo o tamiz, ya que solo se seleccionarán las alternativas $a_i \in A$, que den los valores más preferidos de X_1 . De estas alternativas que quedaron, se seleccionan solamente las que den los valores más preferibles de X_2 y así se continúa hasta que quede una sola alternativa, que se elegirá como la mejor, o hasta llegar al atributo X_n . Si ha quedado más de una alternativa, se buscará otro método de selección o se agregarán más atributos.

Métodos interactivos de programación multiobjetivo

La información que se extrae del decididor respecto de la estructura de preferencia, puede serlo en forma interactiva o no. En caso de no serlo, esa extracción o solicitud de información, se hace una sola vez. En el caso interactivo, se requiere entre el analista y el decididor una interacción activa a través de todo el proceso de búsqueda de la solución. Este método consiste básicamente en:

- a) resolver el problema basado en un conjunto de parámetros iniciales, obteniendo una solución no inferior, admisible
- b) analizar la reacción del decididor ante esta solución
- c) utilizar la respuesta del decididor, para formular un nuevo conjunto de parámetros, formulando un nuevo problema a resolver

Los pasos a), b), c) se repiten hasta que el decididor quede satisfecho con la solución o hasta que el método no permita encontrar más soluciones.

V. ANALISIS CUALITATIVO DE SISTEMAS NO LINEALES

Los sistemas dinámicos, regidos por ecuaciones diferenciales, o en diferencias finitas, evolucionan en el tiempo, partiendo de condiciones iniciales dadas, según trayectorias calculables por métodos numéricos.

Pese a ello, es interesante y a veces indispensable, tener un "retrato" de las trayectorias en el espacio de estados, así como ubicar en posición y clase a los puntos de equilibrio, para guiar la solución numérica.

V.1. Singularidades: Puntos críticos y ciclos límites, su estabilidad

El primer paso consiste en encontrar los puntos críticos o de equilibrio del sistema.

Si escribimos las ecuaciones dinámicas para ambos casos (continuo y discreto).

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad x(k+1) = f(x(k)) \quad k=0, 1, \dots$$

Resolviendo

$$f(x(t)) = 0 \quad f(x(k)) = 0$$

o sea

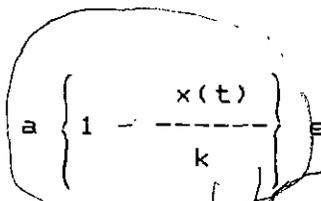
$$f_1(x_1 \dots x_n) = f_2(x_1 \dots x_n) = \dots = f_n(x_1 \dots x_n) = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones algebraicas, se encontrarán las coordenadas de los puntos críticos.

Ejemplo:

El crecimiento exponencial en caso de recursos ilimitados, se modifica en la curva logistica:

$$\dot{x}(t) = a \left\{ 1 - \frac{x(t)}{k} \right\} x(t) \quad \text{con} \quad a > 0 \quad k > 0$$



es un índice instantáneo de crecimiento que

decrece cuando x aumenta hasta un máximo k .

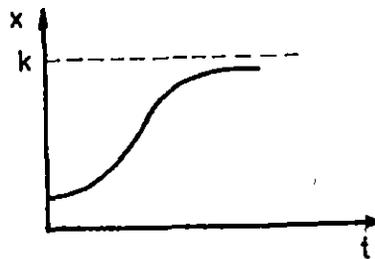


Figura V.1

Sus puntos críticos son:

$$x(t) = 0 \text{ y } 1 - \frac{x(t)}{k} = 0 \Rightarrow x(t) = k$$

La solución de la ecuación diferencial es,

$$x(t) = \frac{k}{1 + b \cdot e^{-at}}$$

La diferencia entre ambos puntos críticos es que en el primero, $x(t)=0$, el sistema no se queda y tiende al segundo, $x(t)=k$, y aunque se produjera una pequeña perturbación, retoma esa tendencia $x \rightarrow k$.

Otro ejemplo es el caso del péndulo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{L} \sin x_1 \end{cases}$$

(x_1 es desplazamiento, x_2 velocidad). La solución es:

$$x_2 = 0 \quad \frac{-g}{L} \sin x_1 = 0$$

o sea los puntos críticos son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm n \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

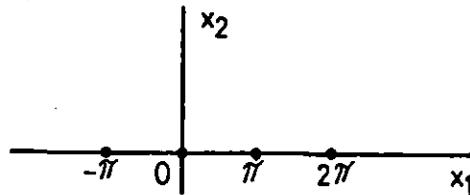


Figura V.2

El análisis cualitativo de un punto crítico, se realiza en un entorno suficientemente pequeño en modo tal que de las ecuaciones (1) se considera la parte lineal de f lo que es suficiente, generalmente, para investigar la estabilidad de ese punto (ier. método de Liapunov).

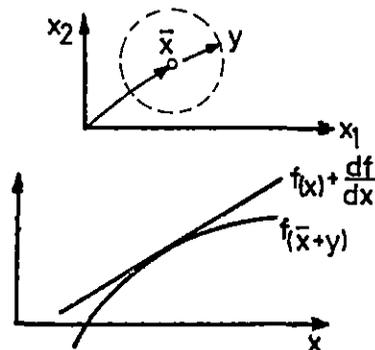


Figura V.3

Si llamamos \bar{x} al punto crítico y hacemos $x = \bar{x} + y$

$$f(\bar{x} + y) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(\bar{x}) \cdot y$$

en un sistema de orden n , en un entorno del punto crítico (x_1, \dots, x_n)

$$f_i(\bar{x}_1 + y_1 \dots \bar{x}_n + y_n) \cong f_i(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) y_1 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) y_n \quad (2)$$

o en notación vectorial

$$f(\bar{x} + y) = f(\bar{x}) + F y$$

en donde F es la matriz Jacobiana de f

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \dots$$

para el caso discreto, igualmente, haciendo

$$x(k) = \bar{x} + y(k)$$

y sustituyendo en $x(k+1) = f(x(k))$

$$\bar{x} + y(k+1) \cong f(\bar{x}) + F y(k)$$

como $\bar{x} = f(\bar{x})$

$$y(k+1) = F y(k)$$

los criterios serán válidos para pequeños valores de y.

El estudio de los autovalores de F nos dirá de la estabilidad o no del punto crítico en cuestión.

Veremos el caso de dos dimensiones. Estudiamos el equilibrio en el origen del sistema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

los autovalores de la matriz

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

haciendo

$$| \lambda I - F | = 0$$

o sea

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21} a_{12} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 0$$

las soluciones serán:

$$x_1 = c_{11} e^{\lambda_1 t} + c_{12} e^{\lambda_2 t}$$

$$x_2 = c_{21} e^{\lambda_1 t} + c_{22} e^{\lambda_2 t}$$

siendo

$$\lambda_1 = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left[\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right]^2 + a_{21} a_{12}}$$

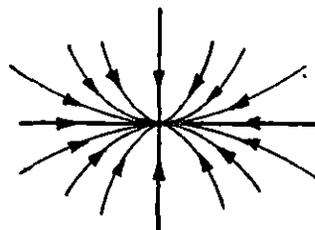
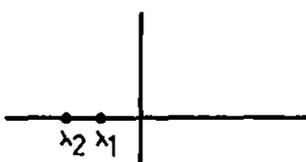
$$\lambda_2 = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left[\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right]^2 + a_{21} a_{12}}$$

Los λ pueden ser reales o complejos, dependiendo de los signos de a_{21} y a_{12} .

Según los valores de λ_1 y λ_2 se tienen las siguientes posibilidades para el punto crítico en el origen.

CASO 1 RAICES REALES

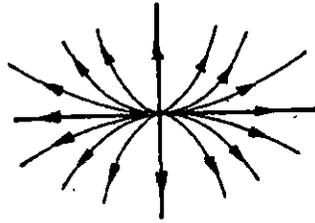
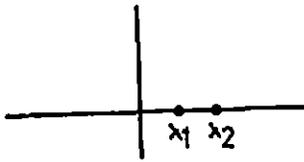
nodo estable



$$\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0$$

Figura V.4

nodo inestable

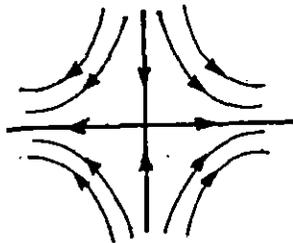
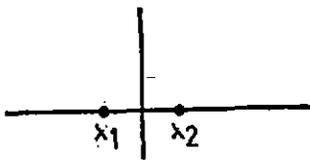


$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

Figura V.5

punto de ensilladura



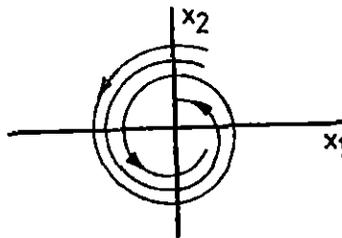
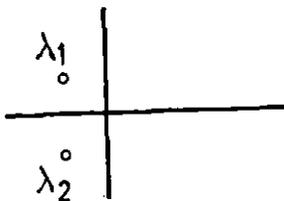
$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

Figura V.6

CASO 2 RAICES IMAGINARIAS

foco estable

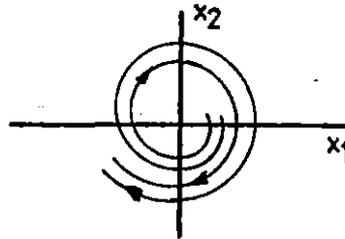
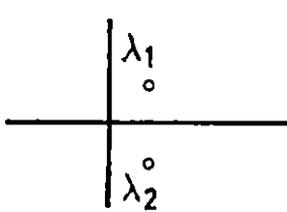


$$\lambda_1 = -\alpha + \beta i$$

$$\lambda_2 = -\alpha - \beta i$$

Figura V.7

foco inestable

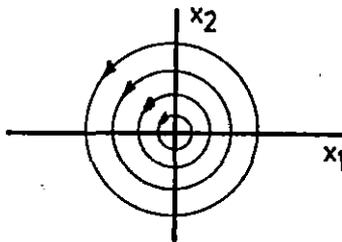
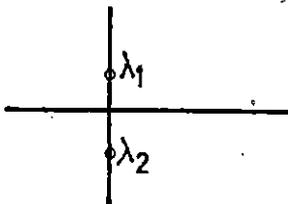


$$\lambda_1 = \alpha + \beta i$$

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i$$

Figura V.8

centro



$$\lambda_1 = \beta i$$

$$\lambda_2 = -\beta i$$

Figura V.9

Si se observa que la inestabilidad aparece cuando las componentes reales de los valores característicos λ , son al menos uno de ellos positivo. Es evidente que $e^{\lambda t}$ tiende a ∞ con t si $\lambda > 0$.

Veamos el ejemplo del péndulo.

Si la masa es unitaria $m=1$ y $l=1$ la ecuación dinámica es:

$$\ddot{x} = -\text{sen } x$$

que, haciendo:

$$x_1 = x \quad \text{arco}$$

$$x_2 = \dot{x} \quad \text{velocidad}$$

se convierte en el sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\text{sen } x_1 \end{cases}$$

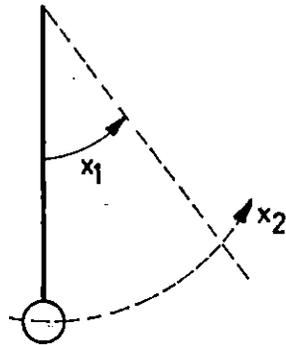


Figura V.10

Para buscar los puntos críticos debemos igualar a cero las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\text{sen } x_1 = 0 \end{cases}$$

De donde obtenemos que los puntos críticos se producen para:

$$x_2 = 0 \quad (\text{velocidad cero})$$

$$x_1 = \pm n \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para estudiar cada uno de estos puntos críticos debemos analizar el Jacobiano

$$J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\text{cos } x_1 & 0 \end{vmatrix}$$

1) Análisis del punto

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$J(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Obtenemos la ecuación característica

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

como vimos esta solución representa un centro. O sea, el punto $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$ es un Centro.

2) Análisis del punto crítico $x_1 = 0 \quad x_2 = \pi$

$$J(0, \pi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|\lambda I - J| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

esta solución representa un punto de ensilladura.

Se puede ver fácilmente que todas las soluciones que surgen de $x_1 = \pm n\pi$ con n par son centros mientras que con n impar son puntos de ensilladura.

La representación de las trayectorias en el plano (x_1, x_2) es:

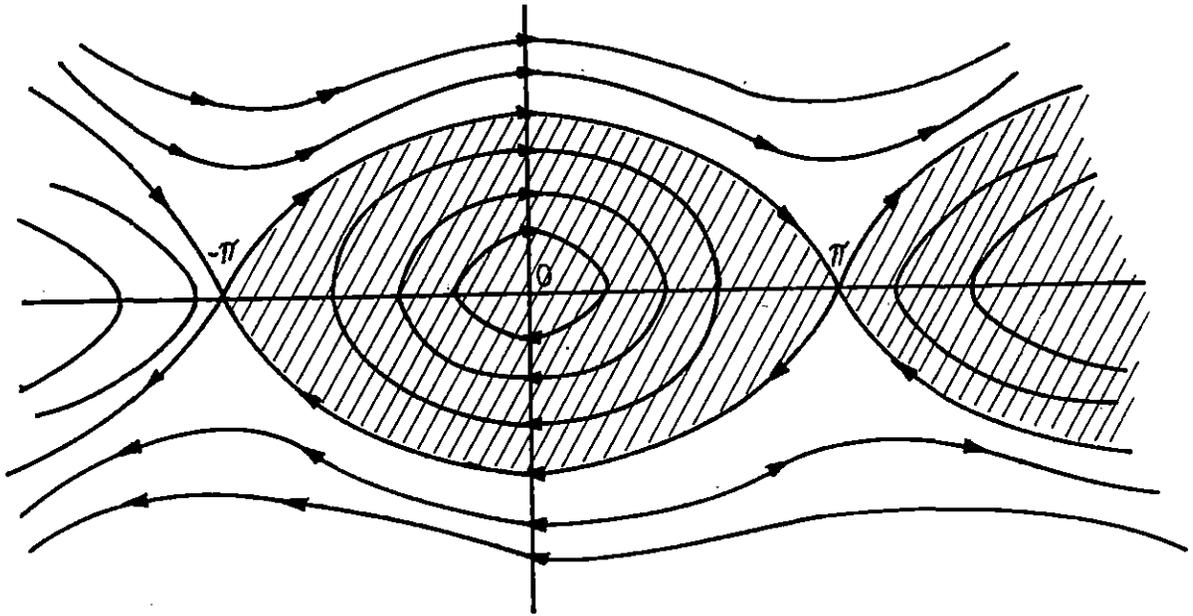


Figura V.11

las zonas rayadas son de estabilidad

Ciclos límites

Al analizar un entorno suficientemente pequeño de un punto crítico, la aproximación lineal, nos permitió estudiar las distintas singularidades y su estabilidad en pequeño.

En los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, aparecen a más de los puntos críticos, trayectorias singulares, llamadas ciclos límite. (Figura V.12)

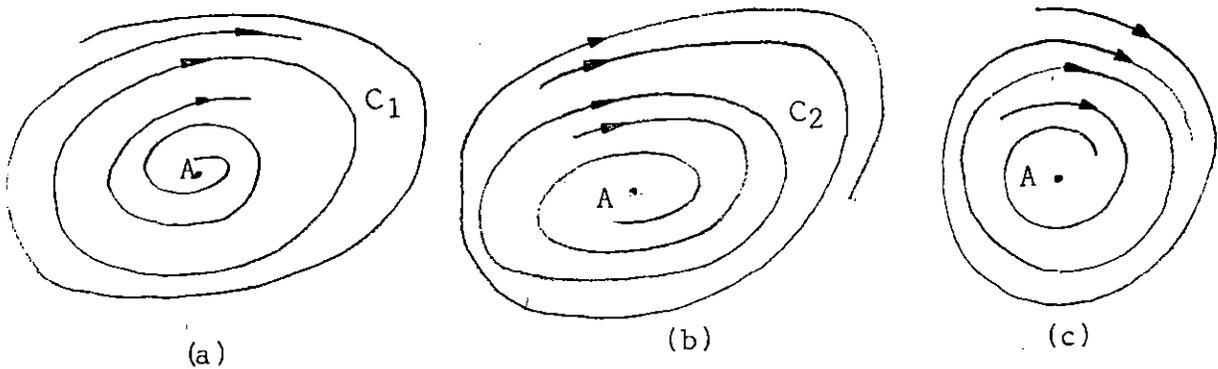


Figura V.12

Dentro de un ciclo límite, se demuestra, debe haber por lo menos un punto crítico. Los puntos críticos nodos, focos y centros tienen una propiedad llamada índice, que es igual a uno. El índice de un punto de ensilladura es menos uno.

Se demuestra que si dentro de un ciclo límite hay varios puntos críticos, la suma de sus índices debe ser igual a +1.

Dentro de un ciclo límite, no puede haber, por ejemplo, sólo un punto de ensilladura. Si lo hubiera, tendría que existir además dos puntos de índice +1. ($-1+1+1=1$).

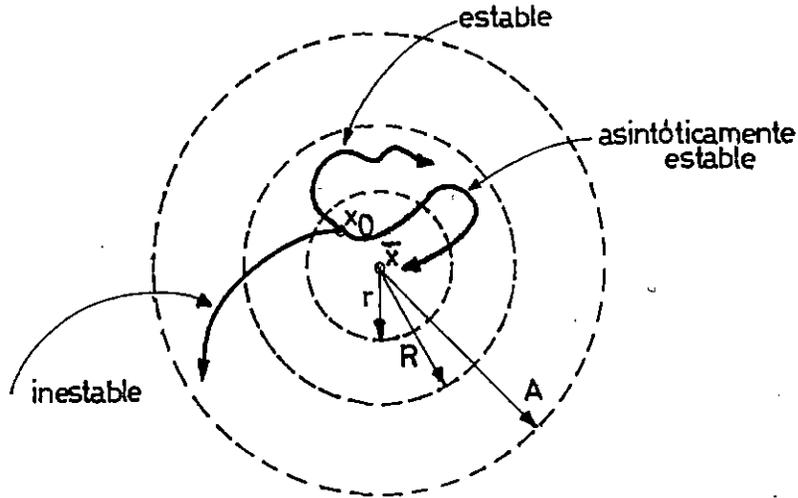
Analizando las trayectorias externas e internas de un C.L., observemos en la Figura V.12 (a) que por ambos lados las trayectorias se acercan al C.L. para t creciente.

En el caso (b) se alejan adentro y afuera.

En el caso (c) se alejan adentro y se acercan afuera.

Diremos que el C.L. (a) es estable; el (b) inestable y el (c) cuasiestable.

V.2. Estabilidad según Liapunov



Supongamos un sistema representado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en notación vectorial

$$\dot{x} = F(x) \quad F(\bar{x}) = 0 \quad (1)$$

y se cumple para el mismo que las derivadas

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall ij$$

existen y son continuas en una región esférica $\Omega / \|x\| \leq A$ cuyo centro es el punto crítico \bar{x} del sistema.

Llamamos $S(R)$ a la región esférica en la cual $\|x\| \leq R$ y $H(R)$ a la esfera $\|x\| = R$

1. Diremos que el punto \bar{x} es estable en Ω si para todo $R < A$ existe un $r < R$ tal que si una trayectoria se inicia en un punto x_0 interno a $S(r)$ nunca alcanza la frontera $H(R)$.
2. Diremos que el punto \bar{x} es asintóticamente estable si una trayectoria que se inicia en x_0 es estable y además tiende a \bar{x} cuando t tiende a ∞ .
3. Diremos que el punto \bar{x} es inestable si una trayectoria que se inicia en un punto x_0 interno a $S(r)$, no importa cuán pequeño sea r , alcanza la frontera $H(R)$.

Funciones de Liapunov

Un rol muy importante juegan las funciones escalares $V(x)$, positiva definida, llamadas función de Liapunov.

$$V(x) = V(x_1, x_2 \dots x_n)$$

que cumple con las condiciones:

- 1- $V(x)$ y sus derivados $\partial V / \partial x_i$ son continuas en una cierta región Ω alrededor del origen (punto crítico).
- 2- La función se anula en el origen $V(0)=0$.
- 3- $V(x)$ es positiva para todo punto distinto del origen, en Ω .

Recordemos que a lo largo de toda trayectoria q_1 solución de (1):

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} = F \cdot \nabla V$$

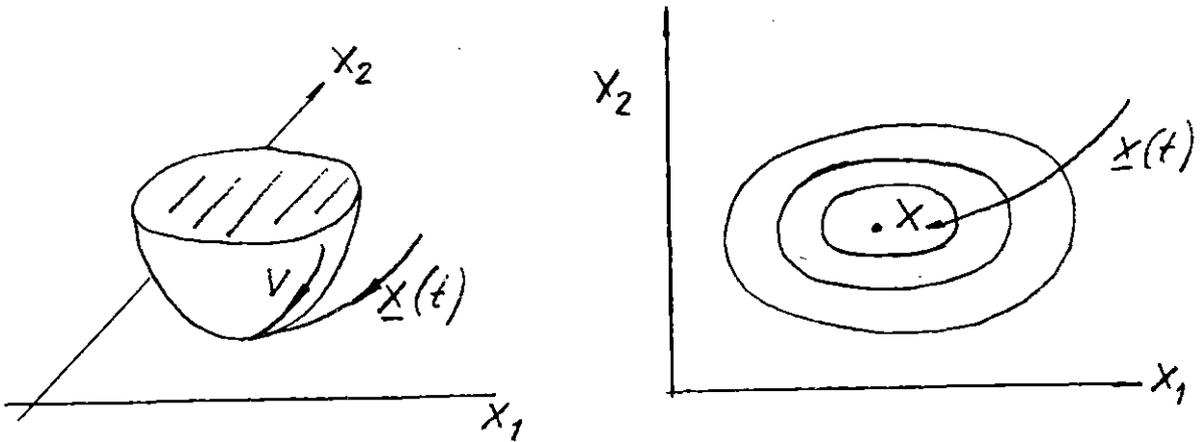
producto escalar.

$$\nabla V = \text{grad. } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \text{ vector gradiente}$$

Si además $\dot{V} \leq 0$ en Ω , V se llamará función de Liapunov.

Teorema de Liapunov

- 1- Si en un cierto entorno Ω del origen, existe una función $V(x)$ de Liapunov entonces el origen es estable.
- 2- Si además $\dot{V}(x) < 0$ para todo punto excepto el origen, la estabilidad es asintótica.



En la figura, puede apreciarse el significado geométrico de las funciones de Liapunov.

Ejemplō: Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

que tiene un punto crítico o de equilibrio en $x_1 = x_2 = 0$.

Definamos

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

V es continua con derivadas primeras continuas. V satisface los requerimientos de una función de Liapunov.

Además

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 \\ &= 2x_1 x_2 + 2x_2 (-x_1 - x_2) \\ &= -2x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

El sistema es estable en $x_1 = x_2 = 0$.

La estabilidad no es asintótica, pues V no es estrictamente negativa en todo punto distinto de cero.

$$L(x_1, x_2) = x_1(\omega_1 + 3\omega_2) + x_2(2\omega_1 + \omega_2) - \lambda_1(x_2 - 5) - \lambda_2(x_1 + x_2 - 6) - \lambda_3(2x_1 + x_2 - 9) - \lambda_4(x_1 - 4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} \leq 0 & \frac{\partial L}{\partial x_i} \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} \cdot x_i = 0 & \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} \cdot \lambda_j = 0 \end{cases}$$

Comme $x_i \neq 0 \forall i \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \forall i$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \omega_1 + 3\omega_2 - \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

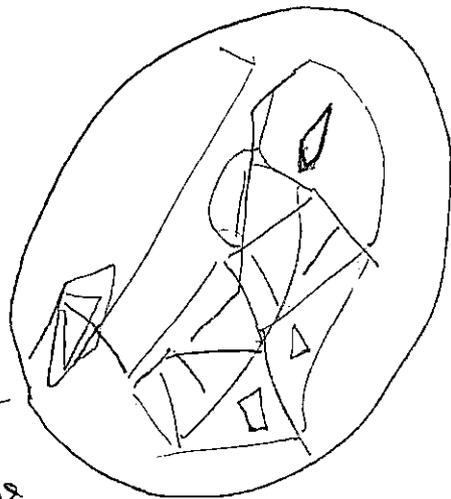
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2\omega_1 + \omega_2 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1 - \lambda_1(x_2 - 5) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2 - \lambda_2(x_1 + x_2 - 6) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = \lambda_3 - \lambda_3(2x_1 + x_2 - 9) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = \lambda_4 - \lambda_4(x_1 - 4) = 0$$



→ P.L. interpretation Economique
→ Kunk-Trecker

→

ANEXO 1

(a) Programación no lineal. Condiciones de existencia del óptimo
5 8

El caso básico de la programación no lineal

$$\max_{\underline{x}} F(\underline{x}) \text{ con las condiciones } \underline{g}(\underline{x}) \leq \underline{b} \quad \underline{x} \geq 0 \quad (1)$$

(en lenguaje vectorial)

En un primer enfoque supondremos no existen las restricciones $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i \quad \forall i=1, \dots, m$

Si existe un máximo local en \underline{x}^* , entonces para todos los puntos en un entorno suficientemente pequeño: $\underline{x}^* + \Delta \underline{x}$:

$$F(\underline{x}^*) \geq F(\underline{x}^* + h \Delta \underline{x}) \quad (2)$$

siendo $\Delta \underline{x}$ una dirección en el espacio E^n y $h > 0$, suficientemente pequeño.

Suponiendo la $F(\underline{x})$ dos veces continuamente diferenciable, la función del segundo miembro de (2), se puede desarrollar en serie de Taylor en torno a \underline{x}^* :

$$F(\underline{x}^* + h \Delta \underline{x}) = F(\underline{x}^*) + h \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial \underline{x}} \cdot \Delta \underline{x} + \frac{h^2 (\Delta \underline{x})^T}{2!} \frac{\partial^2 F(\underline{x}^* + \theta h \Delta \underline{x})}{\partial \underline{x}^2} \cdot \Delta \underline{x} \quad (3)$$

siendo $0 < \theta < 1$

Con (2) y (3) se obtiene la desigualdad fundamental:

$$h \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} + \frac{h^2 (\Delta \underline{x})^T}{2!} \frac{\partial^2 F(\underline{x}^* + \theta h \Delta \underline{x})}{\partial \underline{x}^2} (\Delta \underline{x}) \leq 0 \quad (4)$$

condición necesaria para un máximo local en \underline{x}^* .

Si \underline{x}^* es una solución interior, o sea se cumple la desigualdad estricta $\underline{x}^* > 0$, tendremos las mismas condiciones de primer orden de la programación clásica, la anulación de todas las derivadas parciales de primer orden, en \underline{x}^* . Si una de las variables, por ejemplo x_j^* , está situada en el contorno $x_j^* = 0$ por (4) deberá ser $\frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \Delta x_j \leq 0$ y como en este caso $\Delta x_j \geq 0$, la correspondiente

condición de primer orden será:

$$\frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{si} \quad x_j^* = 0$$

Como vemos, en una solución interior la derivada es cero o la variable de decisión toma el valor cero en una solución de contorno, será en cualquier caso:

$$\frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_j} : x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Un máximo local en \underline{x}^* viene caracterizado por las $2n+1$ condiciones de primer orden:

$$n \text{ condiciones } \left(\begin{array}{l} \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{si } x_j^* > 0 \\ \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{si } x_j^* < 0 \end{array} \right) \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$$n \text{ condiciones } \left(x_1^* \geq 0; x_2^* \geq 0 \dots x_n^* \geq 0 \right)$$

$$\text{una condición: } \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_1} \cdot x_1^* + \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_2} \cdot x_2^* + \dots + \frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_n} \cdot x_n^*$$

Hacemos notar que en caso de $\min F(\underline{x})$ con $\underline{x} \geq 0$ en caso de estar situada una variable solución \underline{x} en el contorno : $x_j^* = 0$, deberá ser $\frac{\partial F(\underline{x}^*)}{\partial x_j} \geq 0$

(b) Las condiciones de Kuhn-Tucker

El problema general

$$\max_{\underline{x}} F(\underline{x}) \text{ con } \underline{g}(\underline{x}) \leq \underline{b} \quad \underline{x} \geq 0 \quad (6)$$

transformaremos las restricciones de desigualdad en igualdad introduciendo un vector columna de m variables auxiliares de holgura:

$$\underline{S} = (S_1, S_2, \dots, S_m)^T = \underline{b} - \underline{g}(\underline{x})$$

quedando así formulado el problema:

$$\max_{\underline{x}; \underline{S}} F(\underline{x}) \text{ con } \underline{g}(\underline{x}) + \underline{S} = \underline{b} \quad \underline{x} \geq 0 \quad \underline{S} \geq 0 \quad (7)$$

La Lagrangiana correspondiente será:

$$L = F(\underline{x}) + \underline{\lambda}(\underline{b} - \underline{g}(\underline{x}) - \underline{S})$$

aplicando las condiciones de primer orden obtenidas en el punto (a) de este anexo, tendremos:

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{x} = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{x} = 0 \quad (\text{producto escalar})$$

$$\underline{x} \geq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = \underline{b} - \underline{g}(\underline{x}) - \underline{S} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{S}} = -\underline{\lambda} \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \underline{S}} \cdot \underline{S} = -\underline{\lambda} \cdot \underline{S} = 0$$

$$\underline{S} \geq 0$$

Las variables, funciones y derivadas se calculan en el óptimo \underline{x}^* , $\underline{\lambda}^*$ y \underline{S}^* .

Eliminando el vector \underline{S} sustituyéndolo por $\underline{b} - \underline{g}(\underline{x})$ se obtienen las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\begin{array}{l}) \\ (\quad \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \right) \leq 0 \\ (\\ (\quad \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{x}} \right) \cdot \underline{x} = 0 \\ (\\ (\quad \underline{x} \geq 0 \\ (\\ (\quad (\underline{b} - \underline{g}(\underline{x})) \geq 0 \\ (\\ (\quad \lambda (\underline{b} - \underline{g}(\underline{x})) = 0 \\ (\\ (\quad \lambda \geq 0 \\ (\end{array} \quad (8)$$

estas condiciones se obtienen también en forma directa definiendo la lagrangiana como

$$L = F(\underline{x}) + \underline{\lambda}(\underline{b} - \underline{g}(\underline{x}))$$

Estas condiciones son necesarias y suficientes para un máximo local (estricto), si la función objetivo es cóncava (estrictamente) y las funciones de restricción son convexas.

Por otra parte, si observamos las condiciones de K-T en (8) nos encontramos con dos grupos de fórmulas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \cdot \underline{x}^* = 0 \\ \underline{x}^* \geq 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} \geq 0 \\ \underline{\lambda}^* \cdot \frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = 0 \\ \underline{\lambda}^* \geq 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

observando el sentido de las desigualdades y recordando las condiciones para que se dé un máximo o un mínimo, aparece claramente que el punto óptimo $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$ es un punto de ensilladura de la lagrangiana pues maximiza respecto de todas las variables de decisión $\underline{x} \geq 0$ y minimiza respecto a todos los multiplicadores de Lagrange no negativos $\underline{\lambda} \geq 0$, es decir:

$$L(\underline{x}, \underline{\lambda}^*) \leq L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*) \leq L(\underline{x}^*, \underline{\lambda}) \quad \forall \underline{x} \geq 0, \forall \underline{\lambda} \geq 0 \quad (11)$$

El problema de hallar vectores no negativos $(\underline{x}^*, \underline{\lambda}^*)$ que satisfagan la (11), se conoce como el problema del punto de ensilladura.

Esto sugiere plantear los problemas duales:

$$\begin{array}{ll} \max_{\underline{x}} & L(\underline{x}, \underline{\lambda}) \quad \text{con} \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} \geq 0 \quad \underline{x} \geq 0 \\ \min_{\underline{\lambda}} & L(\underline{x}, \underline{\lambda}) \quad \text{con} \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \leq 0 \quad \underline{\lambda} \geq 0 \end{array}$$

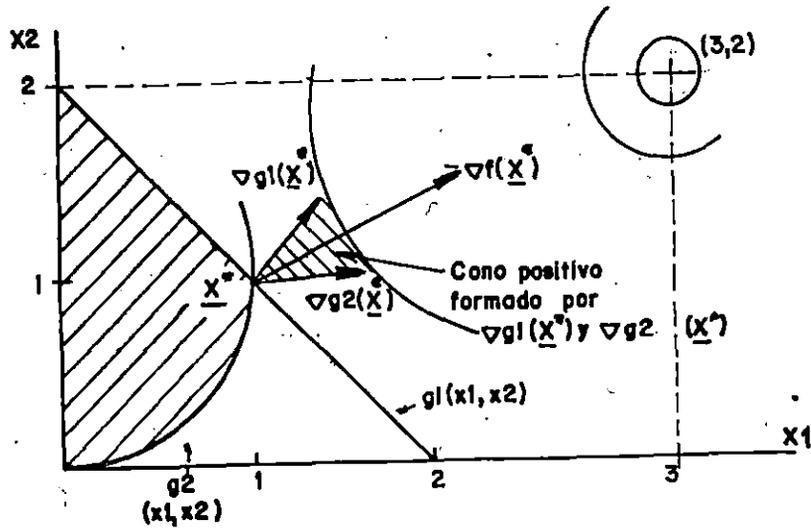
Este enfoque es muy fructífero, especialmente en la programación lineal. (anexo 5).

Las condiciones de Kuhn-Tucker caracterizan una solución, pero no proporcionan un método constructivo para poder obtenerla.

Consideremos un ejemplo:

$$\begin{array}{l} \min f(x_1, x_2) = \underbrace{(x_1 - 3)^2} + \underbrace{(x_2 - 2)^2} \\ \text{con las restricciones} \quad \left(\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \leq 2 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Representando gráficamente .



Geométicamente, las condiciones de Kuhn-Tucker, significan que para que \underline{x}^* sea un óptimo local, el gradiente de la función objetivo (o el negativo del gradiente si, como en este caso, se busca el mínimo), debe estar dentro del cono formado por los gradientes de las restricciones activas $g_i(\underline{x}^*)=0$.

ANEXO 2

(a) Sistemas de ecuaciones diferenciales

Recordaremos brevemente la operatoria de la resolución de ecuaciones diferenciales para el caso lineal, con coeficientes constantes.

Ecuación lineal homogénea:

Sea la ecuación lineal homogénea de grado n y a coeficientes constantes:

$$a_0 \cdot x^{(n)} + a_1 \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot x = 0 \quad (1)$$

(n) indica derivada enésima de x(t) respecto de t si suponemos que sus soluciones particulares son de la forma $x = e^{k \cdot t}$ con $k = cte$, sustituyendo en (1), tendremos:

$$a_0 \cdot k^n \cdot e^k x + a_1 \cdot k^{n-1} \cdot e^k x + \dots + a_n e^k x = 0$$

dividiendo por $e^k x \neq 0$

$$a_0 k^n + a_1 \cdot k^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

llamada ecuación característica.

Raíces reales distintas

Las raíces $k_1, k_2 \dots k_n$ de la (2) determinan las soluciones de la (1) $e^{k_1 t}; e^{k_2 t}; \dots e^{k_n t}$ que serán independientes si los k_i son distintos.

En este caso la solución general de la (1) será:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{k_1 t} + c_2 \cdot e^{k_2 t} + \dots + c_n \cdot e^{k_n t} \quad (3)$$

Las c_i son constantes arbitrarias, pudiendo conocer sus valores al dar las condiciones iniciales del problema:

$$x(t_0) = x^0; x^{(1)}(t_0) = x^1; \dots x^{(n-1)}(t_0) = x^{n-1}$$

Ejemplo 1:

$$\ddot{x} - 3 \dot{x} + 2x = 0 \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{pmatrix}$$

la ecuación característica: $k^2 - 3k + 2 = 0$

sus raíces: $k_1 = 1$ / $k_2 = 2$

solución general: $x(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t}$

reemplazando las condiciones iniciales:

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$x(1) = c_1 e + c_2 e^2 = 1$$

o sea $c_1 = -0,214$; $c_2 = 0,214$

Raíces complejas

Por ser los coeficientes de (2) reales, las raíces complejas sólo aparecerán en pares conjugados:

$$k_1 = \alpha + \beta_i ; k_2 = \alpha - \beta_i$$

o sea $e^{(\alpha + \beta_i)t} = e^{\alpha t} (\cos. \beta t + i \text{ sen. } \beta t)$

y $e^{(\alpha - \beta_i)t} = e^{\alpha t} (\cos. \beta t - i \text{ sen. } \beta t)$

Se demuestra que las partes reales o las partes imaginarias de estas soluciones, son por separado, también solución de la (1).

De esta manera a las raíces k_1 k_2 le corresponden dos soluciones reales:

$$e^{\alpha t} \cdot \cos. \beta t \quad \text{y} \quad e^{\alpha t} \cdot \text{sen. } \beta t$$

Ejemplo:

$$\ddot{x} + 4 \dot{x} + 5 x = 0$$

la ecuación característica: $k^2 + 4k + 5 = 0$

sus raíces: $k_1 = -2 + i$ / $k_2 = -2 - i$

la solución general es: $x = e^{-2t} (c_1 \cdot \cos t + c_2 \text{ sen } t)$

Raíces múltiples

Si una de las raíces k_i es múltiple, digamos de multiplicidad 4, entonces no sólo $e^{k_i t}$ será solución de la (1) sino también:

$$t \cdot e^{k_i t}; t^2 \cdot e^{k_i t}; t^3 \cdot e^{k_i t}$$

Ejemplo:

$$x'' - 3x' + 3x - x = 0$$

la ecuación característica: $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = (k-1)^3 = 0$

tiene la raíz triple: $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ por lo que la solución general tendrá la forma:

$$x = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) \cdot e^t$$

Ecuaciones lineales no homogéneas:

$$\text{Sea } a_0 \cdot x^{(n)} + a_1 \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_n \cdot x = f(x) \quad (4)$$

a coeficiente a_i constantes.

La solución general de esta ecuación, con $f(x)$ continua, es igual a la suma de la solución general de la homogénea (1) correspondiente y de cualquier solución particular $x^*(t)$ de la ecuación no homogénea (4) o sea:

$$\text{solución general: } x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot e^{k_i t} + x^*(t)$$

Ejemplo:

$$\ddot{x} + x = t$$

una solución particular inmediata es $x(t) = t$

la homogénea: $\ddot{x} + x = 0$

su ecuación característica: $k^2 + 1 = 0 \quad k_1 = i \quad / \quad k_2 = -i$

solución general: $x = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t$

por lo que la solución general de la ecuación no homogénea, será:

$$x = (c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t) + t$$

Veremos el caso en que $f(x)$ sea un polinomio de grado r :

$$f(x) = A_0 \cdot t^r + A_1 \cdot t^{r-1} + \dots + A_r \quad (A_i = \text{ctes})$$

Si $a_n \neq 0 \exists$ una solución particular de la ecuación (4) que tiene también la forma de polinomio de grado r .

$$x = B_0 \cdot t^r + B_1 \cdot t^{r-1} + \dots + B_r \quad (5)$$

Sustituyendo la (5) en (4) y comparando los coeficientes de iguales potencias de t en ambos miembros, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales que permite determinar los B_i en función de los A_i .

$$a_n \cdot B_0 = A_0 \quad B_0 = \frac{A_0}{a_n}$$

$$a_n \cdot B_1 + r \cdot a_{n-1} \cdot B_0 = A_1$$

de donde se puede determinar B_1 y así sucesivamente.

Ejemplo:

$$x'' + x = t^2 + t$$

la solución particular será de la forma: $x = B_0 \cdot t^2 + B_1 \cdot t + B_2$ sustituyendo e igualando coeficientes de los términos de igual grado respecto de t .

Obtendremos:

$$x'' = 2 B_0 t + B_1$$

$$x = 2 \cdot B_0 \quad \text{reemplazando:}$$

$$2 B_0 + B_0 t^2 + B_1 t = B_2 = t^2 + t \quad \text{igualando coeficiente:}$$

$$B_0 = 1$$

$$B_1 = 1$$

$$2 B_0 + B_2 = 0 \quad B_2 = -2$$

$$\text{Solución particular: } x^*(t) = t^2 + t - 2$$

$$\text{Solución general : } x(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \cdot \sin t + t^2 + t - 2$$

Sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

Un sistema de ecuaciones diferenciales, se llama lineal si es lineal con respecto a todas las funciones desconocidas y a sus derivadas.

$$\begin{aligned}
) \quad \dot{x}_1 &= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n + f_1(t) \\
 (\\
) \quad \dot{x}_2 &= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n + f_2(t) \\
 (\\
) \quad \dot{x}_n &= a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n + f_n(t)
 \end{aligned} \tag{6}$$

este sistema es no homogéneo pues aparecen las $f_i(t)$ y a coeficientes constantes.

Se puede escribir en forma vectorial

$$\dot{X} = A \cdot X + F$$

Donde:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} \quad \dot{X} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{vmatrix}$$

Son vectores columna o matrices $n \times 1$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

las soluciones del sistema (6), con las $f_i = 0$, o sea el sistema homogéneo, son del tipo:

$$x_1 = \alpha_1 \cdot e^{kt}; \quad x_2 = \alpha_2 \cdot e^{kt}; \quad \dots; \quad x_n = \alpha_n \cdot e^{kt}$$

con $\alpha_i =$ constantes. Sustituyendo en (6), dividiendo por e^{kt} y pasando al primer miembro, tendremos:

$$\begin{aligned}
) \quad (a_{11} - k) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \dots + a_{1n} \alpha_n &= 0 \\
 (\\
) \quad a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - k) \alpha_2 + \dots + a_{2n} \alpha_n &= 0 \\
 (\\
) \quad a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k) \alpha_n &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Para que este sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tenga solución no trivial, es necesario y suficiente que el determinante del sistema (7) sea igual a cero.

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - k) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - k) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - k) \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

esta ecuación se llama característica. Si las raíces k_i de las (8) son distintas, las sustituimos en la (7) y determinamos los valores $\alpha_j^{(i)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) correspondientes, con lo que tendremos n soluciones del sistema (6), homogéneo, de la forma:

$$x_1^{(i)} = \alpha_1^{(i)} \cdot e^{k_1 t}; \quad x_2^{(i)} = \alpha_2^{(i)} \cdot e^{k_1 t}; \quad \dots \quad x_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} \cdot e^{k_1 t}$$

donde el índice superior señala ($i = 1, 2, \dots, n$)

el número de la solución, y el inferior, el de la función desconocida.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$

ecuación característica: $\begin{vmatrix} 1 - k & 2 \\ 4 & 3 - k \end{vmatrix} = k^2 - 4k - 5 = 0$

sus raíces: $k_1 = 5; k_2 = 1$

buscamos la solución en la forma:

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} \cdot e^{5t}; \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} \cdot e^{5t}$$

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} \cdot e^{-t}; \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} \cdot e^{-t}$$

y sustituyendo en el sistema original, tendremos:

$$-4\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \text{ con lo que } \alpha_2^{(1)} = 2\alpha_1^{(1)}$$

$\alpha_1^{(1)}$ permanece arbitrario, por lo tanto:

$$x_1^{(1)} = c_1 \cdot e^{5t} ; x_2^{(1)} = 2 c_1 \cdot e^{5t} ; c_1 = \alpha_1^{(1)}$$

Para determinar los coeficientes $\alpha_1^{(2)} ; \alpha_2^{(2)}$

se obtiene la ecuación $2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0$

de donde $\alpha_1^{(2)} = -\alpha_2^{(2)}$, el coeficiente $\alpha_1^{(2)}$ permanece arbitrario, por consiguiente:

$$x_1^{(2)} = c_2 \cdot e^{-t} ; x_2^{(2)} = -c_2 \cdot e^{-t} ; c_2 = \alpha_1^{(2)}$$

la solución general es:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{5t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ 2 c_1 \cdot e^{5t} - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$	Si las condiciones iniciales son:	$\begin{pmatrix} x_1(0) = 5 \\ x_2(0) = 10 \end{pmatrix}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------------------------------

Reemplazando obtenemos $c_1 = 5 ; c_2 = 0$

por lo que $x_1 = 5 \cdot e^{5t} ; x_2 = 10 \cdot e^{5t}$

(b) Ecuaciones en diferencias finitas:

Dada una secuencia de puntos, igualmente separados, indexados por k y que representan puntos temporales, y una función real x (k), una ecuación en diferencias finitas, es una ecuación que relaciona los valores de x (k) con los de otros puntos.

Por ejemplo:

$$x(k+3) / x(k+2)$$

La expresión general del caso lineal homogéneo, sería:

$$a_n \cdot x(k+n) + a_{n-1} \cdot x(k+n-1) + \dots + a_1 \cdot x(k+1) + a_0 \cdot x(k) = 0 \quad (9)$$

supondremos los $a_i =$ constantes.

El orden de una ecuación en diferencias, es la diferencia entre el mayor y el menor índice que aparece en la ecuación. En el caso de (9) el orden es $k + n - k = n$.

Una solución de (9) es una función $x(k)$ que la satisfaga, o sea que la reduzca a una identidad.

Tal como en el caso de ecuaciones diferenciales, aquí se deben dar tantas condiciones iniciales del problema como el orden de la ecuación.

Si tomamos el caso más simple:

$$x(k+1) = r \cdot x(k) \quad / \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

sería equivalente al conjunto infinito de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(1) &= r \cdot x(0) \\ x(2) &= r \cdot x(1) \\ x(3) &= r \cdot x(2) \\ \hline \end{aligned}$$

conociendo el valor inicial $x(0) = x^0$, podemos calcular por recurrencia todos los $x(k)$:

$$\begin{aligned} x(1) &= r \cdot x^0 \\ x(2) &= r \cdot r \cdot x^0 = r^2 \cdot x^0 \\ x(3) &= r^3 \cdot x^0 \\ \hline \end{aligned}$$

la función $x(k) = r^k$ reduce la ecuación (10) a una identidad:

$$x^{k+1} = r x^k$$

por lo que es una solución. La solución general será:

$$x(k) = c \cdot r^k$$

Para resolver la (9) supondremos que las soluciones son de la forma $x(k) = \lambda^k$, siendo una constante a calcular. Sustituyendo:

$$a_n \cdot \lambda^{k+n} + a_{n-1} \cdot \lambda^{k+n+1} + \dots + a_0 \cdot \lambda^k = 0$$

multiplicando por λ^{-k}

$$a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \quad (11)$$

llamada ecuación característica, que depende sólo de λ . Las raíces de esta ecuación (11), se llaman valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Si todos son distintos, la solución general de la ecuación homogénea será:

$$x(k) = c_1 \cdot \lambda_1^k + c_2 \cdot \lambda_2^k + \dots + c_n \cdot \lambda_n^k$$

Ejemplo 1:

$$x(k+2) - 3 \cdot x(k+1) + 2 \cdot x(k) = 0$$

ecuación característica: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

val. característica : $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$

solución general : $x(k) = c_1 \cdot 1^k + c_2 \cdot 2^k = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2^k$

Necesitamos 2 condiciones iniciales, sean $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 2 \end{cases}$

reemplazando:

$$x(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$x(1) = c_1 + 2 \cdot c_2 = 2$$

por lo que: $c_1 = -2$; $c_2 = 2$

solución general: $x(k) = 2 \cdot 2^k - 2 = 2 \cdot (2^k - 1)$

Sea ahora el caso de la ecuación lineal en diferencias, a coeficientes constantes, pero no homogénea.

$$a_n \cdot x(k+n) + a_{n-1} \cdot x(k+n-1) + \dots + a_0 \cdot x(k) = f(k) \quad (12)$$

que satisfaga un conjunto de n valores iniciales.

Primero se buscan n soluciones linealmente independientes de la correspondiente ecuación homogénea, o sea con $f(k) = 0$ y luego una solución particular $x^*(k)$ de la (12) que no necesariamente debe satisfacer las condiciones iniciales.

La solución general será:

$$x(k) = c_1 \cdot x_1(k) + \dots + c_n \cdot x_n(k) + x^*(k)$$

la que deberá satisfacer las condiciones iniciales.

Según sea la forma de la $f(k)$, se podrá encontrar una solución particular, en un modo similar a como hemos visto para las ecuaciones diferenciales, suponiendo soluciones similares a la misma $f(k)$.

Ejemplo 2:

$$x(k+1) - r \cdot x(k) = M \text{ de primer orden}$$

(M = cte)

$$\text{homogénea: } x(k+1) - r \cdot x(k) = 0$$

$$\text{solución: } x(k) = c \cdot r^k$$

solución particular de la no homogénea. Probemos con $x^*(k) = P$ constante.

Reemplazando:

$$P = rP = M \rightarrow P(1 - r) = M \rightarrow P = \frac{M}{1-r}$$

solución válida si $r \neq 1$. Si la condición inicial es $x(0) = 2$,

$$\text{la solución es: } x(k) = c \cdot r^k + \frac{M}{1-r}$$

$$\text{y } x(0) = c + \frac{M}{1-r} = 2 \quad c = 2 - \frac{M}{1-r}$$

$$x(k) = \left(2 - \frac{M}{1-r}\right) \cdot r^k + \frac{M}{1-r}$$

Ejemplo 3:

$$x(k+2) - 3 \cdot x(k+1) + 2 \cdot x(k) = 3^k$$

la homogénea fue resuelta en el ejemplo 1:

$$x(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k$$

probemos con $x(k) = K \cdot 3^k$ para encontrar una solución particular:

$$K \cdot (3^{k+2} - 3 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3^k) = 3^k$$

multiplicando ambos miembros por 3^{-k}

$$K \cdot (9 - 9 + 2) = 1 \rightarrow K = 1/2$$

la solución general de la ecuación no homogénea, será:

$$x(k) = c_1 + c_2 \cdot 2^k + \frac{1}{2} \cdot 3^k$$

los valores de c_1 y c_2 se obtendrán con las dos condiciones iniciales.

En general si la $f(k)$ es un polinomio de grado m , se prueba con un polinomio completo del mismo grado, si es una exponencial se

prueba con otra de la misma base, multiplicada por una constante. Lo mismo con funciones trigonométricas o logarítmicas.

Sistemas de ecuaciones en diferencias finitas

en forma general

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) = a_{11} \cdot x_1(k) + a_{12} \cdot x_2(k) + \dots + a_{1n} \cdot x_n(k) \\ x_n(k+1) = a_{n1} \cdot x_1(k) + a_{n2} \cdot x_2(k) + \dots + a_{nn} \cdot x_n(k) \end{pmatrix} \quad (13)$$

si suponemos como solución:

$$x_1(k) = \alpha_1 \cdot \lambda^k; \quad x_2(k) = \alpha_2 \cdot \lambda^k; \quad \dots \quad x_n(k) = \alpha_n \cdot \lambda^k$$

y reemplazando en (13)

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot \lambda^{k+1} = a_{11} \cdot \alpha_1 \cdot \lambda^k + a_{12} \cdot \alpha_2 \cdot \lambda^k + \dots + a_{1n} \cdot \alpha_n \cdot \lambda^k \\ \alpha_n \cdot \lambda^{k+1} = a_{n1} \cdot \alpha_1 \cdot \lambda^k + a_{n2} \cdot \alpha_2 \cdot \lambda^k + \dots + a_{nn} \cdot \alpha_n \cdot \lambda^k \end{pmatrix} \quad (14)$$

y dividiendo todas las (14) por λ^k :

$$\begin{pmatrix} (a_{11} - \lambda) \alpha_1 + a_{12} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{1n} \cdot \alpha_n = 0 \\ a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \alpha_n = 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Por ser un sistema homogéneo, para que tenga solución, a más de la trivial, el determinante de los coeficientes debe ser nulo. Encontrados los valores de α_i , el caso se resuelve en forma similar al del sistema de ecuaciones diferenciales.

ANEXO 3

Programación dinámica

Dado el problema general del control

$$\begin{aligned}
\text{máx.}_{\underline{u}(t)} J &= \int_0^T I(\underline{x}, \underline{u}, t) dt + F(\underline{x}(T), T) \\
\dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \\
\underline{x}(0) &= \underline{x}^0 \\
\underline{x}(T) &= \underline{x}^1 \\
(\underline{u}(t)) &\in \bar{U}
\end{aligned} \tag{1}$$

Aplicaremos el 'Principio de Optimalidad' para obtener una relación de recurrencia fundamental.

Suponiendo que existe una solución al problema general del control:

$$J^*(\underline{x}, t)$$

la función de actuación óptima, es el valor maximizado del funcional objetivo para el problema que comienza en el estado inicial \underline{x} en el tiempo t .

$J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}; t + \Delta t)$ es la función de actuación óptima para la segunda porción de la trayectoria óptima, comenzando en el estado $\underline{x} + \Delta \underline{x}$ y en el tiempo $t + \Delta t$. La función de actuación óptima en todo el curso temporal $(0, T)$ será igual a la suma óptima de las contribuciones de las dos porciones del tiempo:

$$J^*(\underline{x}, t) = \max_{\underline{u}} I(\underline{x}, \underline{u}, t) \Delta t + J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t) \tag{2}$$

que es la relación de recurrencia fundamental.

Desarrollando en serie de Taylor para representar

$$J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t) \text{ en el punto } (\underline{x}, t)$$

$$J^*(\underline{x} + \Delta \underline{x}, t + \Delta t) = J^*(\underline{x}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \Delta \underline{x} + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t + \dots \tag{3}$$

$$\text{siendo } \frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} = \left(\frac{\partial J^*}{\partial x_1}, \frac{\partial J^*}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J^*}{\partial x_n} \right) \tag{4}$$

Sustituyendo (3) en (2)

$$\max_{\underline{u}} \left[I(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{J^*}{\underline{x}} \frac{\underline{x}}{t} + \frac{J^*}{t} + \dots \right]$$

y haciendo $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{x}}{\Delta t} = \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

tendremos:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\underline{u}(t)} \left[I(\underline{x}, \underline{u}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J^*}{\partial x_i} \cdot f_i(\underline{x}, \underline{u}, t) \right]$$

esta ecuación diferencial parcial, se llama ecuación de Bellman.

La condición de contorno asociada, es:

$$J^*(\underline{x}(T), T) = F(\underline{x}(T), T)$$

que establece que el valor de la función optimal para el problema en $0 \leq t \leq T$, es el valor de la función final $F(\cdot, \cdot)$ para este estado y tiempo.

ANEXO 4

(a) El principio del máximo para diversas condiciones

En el capítulo III 2.2., vimos aplicado el principio del máximo de Pontryagin al caso en que son dadas las condiciones iniciales de las variables de estado $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$, para un valor dado del tiempo $t=t_0$ inicial y se da el tiempo final $t=T$.

Hay problemas en que la posición final del vector de estado $\underline{x}(T)$ está restringida de alguna manera. Se trata por ejemplo de los casos en que se busca alcanzar una meta en un planeamiento económico, a un costo mínimo, o asignar el agua de un embalse para generar energía eléctrica a un costo mínimo, siéndonos dadas la condición inicial y final del agua embalsada.

El PMP se puede extender a ese tipo de problemas, de control con restricciones terminales, que plantearemos de este modo:

en el intervalo $0 \leq t \leq T$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$\text{con la condición inicial: } \underline{x}(0) = \underline{x}^0 \quad (2)$$

$$\text{con la restricción del control: } \underline{u}(t) \in \underline{U} \quad (3)$$

$$\text{restricciones de terminación: } x_i(T) = x_i^1 \quad \forall_i = 1, 2, \dots, r \quad r < n \quad (4)$$

$$\text{y el funcional objetivo: } \text{máx } J = F(\underline{x}(T)) + \int_0^T \underline{I}(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) dt \quad (5)$$

Las condiciones (4) especifican los valores de r x_i para el tiempo final, lo que geoméricamente significa que la trayectoria solución tiene un origen dado $\underline{x}(0)$ y el punto final debe estar sobre una variedad $(n-r)$ dimensional. Si $r=n$, nos dan entonces como fijo el punto final $\underline{x}(T)$.

Daremos sólo las condiciones en que se puede aplicar el PMP, pues la prueba matemática es muy compleja. (ver (13)). Seleccionaremos nuevamente un vector de n nuevas variables $\underline{p}(t)$.

En este caso cambiarán las condiciones dadas de contorno para $\underline{p}(t)$, dado que algunas $x_i(T)$ están restringidas. Será entonces $p_i(T) = \frac{\partial F(\underline{x}(T))}{\partial x_i} \quad \forall_i = r+1; r+2; \dots, n$.

La regla general es que si $x_i(T)$ está restringida, o sea nos imponen un valor fijo, entonces $p_i(T)$ es libre y si $x_i(T)$ es libre, entonces $p_i(T)$ está restringida.

El teorema del máximo, será ahora:

dadas (1) (2) (3) (4) y (5) sean \underline{x}^* \underline{u}^* una solución óptima de este problema, entonces existe una trayectoria adjunta $\underline{p}^*(t) \neq 0$, tal que se satisfacen para \underline{x}^* \underline{u}^* \underline{p}^* las (1) (2) (3) (4) y

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{-dH}{dx_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

siendo como en el caso visto en III 2.2.

$$H = I(\underline{x}, \underline{u}) + p_1 \cdot f_1 + p_2 \cdot f_2 + \dots + p_n \cdot f_n \quad (6)$$

la condición del máximo que asegura la existencia de $\underline{x}^*(t)$ será entonces: $\forall t \ 0 \leq t \leq T$

$$H(\underline{p}(t), \underline{x}(t), \underline{u}(t)) \leq H(\underline{p}(t), \underline{x}(t), \underline{u}^*(t)) \quad (7)$$

$\forall \underline{u}(t) \in \bar{U}$ o sea $\underline{u}^*(t)$, también en este caso, maximiza el hamiltoniano (6).

Problemas con tiempo terminal libre

En algunos problemas, ocurre que el tiempo final T , no es fijo, puede variar, por lo que es otra variable desconocida, cuyo valor será seleccionado en modo que maximice la (5).

El problema se resuelve como en el caso anterior, agregando la condición $H(\underline{p}(T), \underline{x}(T), \underline{u}(T)) = 0$ que permitirá encontrar el valor de T .

(b) Interpretación de las variables de coestado

El PMP, como veremos en (c), se puede considerar como una generalización dinámica del método de los multiplicadores de Lagrange, y, tal como éstos en el caso estático, las variables de coestado $\underline{p}(t)$, dan información sobre la sensibilidad de la solución a variaciones de los parámetros.

$$\text{Se da que: } \frac{\partial J^*}{\partial x_i(0)} = p_i^*(0)$$

o sea que la sensibilidad del valor óptimo del funcional objetivo a los cambios en el estado inicial $\underline{x}(0)$, vienen dados por el vector $\underline{p}^*(0)$.

Si una variable de coestado, por ej. $p_j(t)$, se anula, entonces la solución es insensible a los pequeños cambios en el valor inicial de la variable de estado correspondiente.

c) Método de Lagrange, Programación dinámica y el Principio del Máximo (8)

Consideremos el problema de control en la forma vista en anexo 3, fórmula (1).

El método de Lagrange aplicado a problemas de optimización estática, consistía en introducir nuevas variables: los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción. Se definía la expresión lagrangiana L y la solución se encuentra en un punto de ensilladura de L , maximizando respecto de las variables de estado o decisión y minimizando con respecto a los multiplicadores de Lagrange.

El PMP se puede considerar como una extensión de este método. Las restricciones son aquí las

$$\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) - \dot{\underline{x}} = 0 \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

Se añade entonces un vector fila de nuevas variables, una por cada una de las n restricciones:

$$\underline{p}(t) = (p_1(t) \dots p_n(t)) \quad (2)$$

llamadas variables de coestado, funciones no nulas, continuas del tiempo.

Se define ahora una lagrangiana, siendo el producto en este caso una integral,

$$L = \int_0^T \left\{ I(\underline{x}, \underline{u}, t) + \underline{p} \cdot [\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) - \dot{\underline{x}}] \right\} dt + F(\underline{x}(T), T) \quad (3)$$

Un punto de ensilladura de la L nos daría la solución $(\{\underline{u}^*, \underline{p}^*\})$ será un punto de silla si:

$$L(\underline{u}, \underline{p}^*) \leq L(\underline{u}^*, \underline{p}^*) \leq L(\underline{u}^*, \underline{p}) \quad (4)$$

La trayectoria de control $\underline{u}^*(t)$ resuelve el problema del control.

Por la segunda desigualdad (4)

$$\int_0^T \left\{ (\underline{p}^* - \underline{p}) \left[\underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) - \dot{\underline{x}}^* \right] \right\} dt \leq 0$$

que se cumple para toda $\{\underline{p}(t)\}$ continua, solamente si:

$$\underline{x}^* = \underline{f}(\underline{x}^*, \underline{u}^*)$$

Las ecuaciones del movimiento se satisfacen a lo largo de la trayectoria óptima.

Pero partiendo de la primera desigualdad (4)

$$J \{ \underline{u}^*(t) \} \geq J \{ \underline{u}(t) \} + \int_0^T p^* [\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) - \underline{x}^*] dt$$

de modo que, para todas las trayectorias de control $\{ \underline{u}(t) \}$ que satisfacen las ecuaciones del movimiento:

$$J \{ \underline{u}^*(t) \} \geq J \{ \underline{u}(t) \}$$

y, por lo tanto, $\{ \underline{u}^*(t) \}$ es la trayectoria óptima.

El valor óptimo del funcional objetivo es entonces el valor de la lagrangiana en el punto de ensilladura.

Programación dinámica (P.D)

Tanto el PMP como la PD se aplican ambos al mismo tipo de problema de control.

En la PD se requiere resolver la ecuación de Bellman:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\underline{u}} \left[I(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \right] \quad (5)$$

empleando la función de acción óptima:

$$\frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} = p$$

La expresión (5) es la función hamiltoniana:

$$I(\underline{x}, \underline{u}, t) + \frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) = I(\underline{x}, \underline{u}, t) + p \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) = H(\underline{x}, \underline{u}, p, t)$$

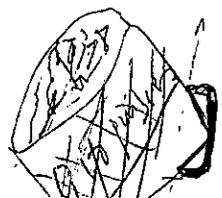
y la (5) se puede escribir:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\underline{u}} [H(\underline{x}, \underline{u}, p, t)] \quad (6)$$

igual condición que el PMP.

La (6) con la \underline{u}^* , control que maximiza el hamiltoniano, nos da la ecuación Hamilton-Jacobi:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = H(\underline{x}, \underline{u}^*, \frac{\partial J^*}{\partial \underline{x}}, t)$$



En el capítulo II.4.3, se plantearon los programas duales en P.L. conocidos los primarios, sin indicar el origen matemático de los mismos.

Haremos ese planteo para un caso de dimensión limitada, para mejor comprensión, extendiéndose el cálculo a mayores dimensiones, sin mayores dificultades.

Sea el problema primario de P.L.:

$$\boxed{\max_{\underline{x}} F = c_1 x_1 + c_2 x_2} \tag{1}$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} g_1: a_{11} x_1 - a_{12} x_2 \leq b_1 \\ g_2: a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ g_3: a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3 \end{array} \right. \tag{2} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

para su resolución, aplicaremos las condiciones de Kuhn-Tucker (anexo 1, b), llamando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a los multiplicadores de Langrange.

La Lagrangiana: $L(\underline{x}, \underline{\lambda}) = F + \lambda_1(b_1 - g_1) + \lambda_2(b_2 - g_2) + \lambda_3(b_3 - g_3)$

$$\begin{aligned} L = & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \lambda_1 (b_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2) + \lambda_2 (b_2 - a_{21} x_1 - a_{22} x_2) + \\ & + \lambda_3 (b_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2) \end{aligned} \tag{3}$$

aplicando las (8) o las equivalentes (10) del citado anexo

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = c_1 - a_{11} \lambda_1 - a_{21} \lambda_2 - a_{31} \lambda_3 \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2 - a_{12} \lambda_1 - a_{22} \lambda_2 - a_{32} \lambda_3 \leq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0$$

y cambiando convenientemente de signos, tendremos

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} f_1: a_{11} \lambda_1 + a_{21} \lambda_2 + a_{31} \lambda_3 \geq c_1 \\ f_2: a_{12} \lambda_1 + a_{22} \lambda_2 + a_{32} \lambda_3 \geq c_2 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{4}$$

En el mismo anexo se planteaban dos problemas duales:

$$\text{primario: } \max_{\underline{x}} L(\underline{x}, \underline{\lambda}) \text{ con } \frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} \geq 0 \quad \underline{x} \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{dual : } \min_{\underline{\lambda}} L(\underline{x}, \underline{\lambda}) \text{ con } \frac{\partial L}{\partial \underline{x}} \leq 0 \quad \underline{\lambda} \geq 0 \quad (6)$$

el problema primario (5) maximiza L en función de x_1, x_2 , tal como lo hemos planteado en (1) y (2) construyendo la lagrangiana (3).

Al aplicar Kuhn-Tucker nos encontramos con nuevas funciones (4) de restricción, pero en las variables $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Para mostrar claramente que se trata del programa dual en las variables $\underline{\lambda}$, reordenemos la lagrangiana (3):

$$\begin{aligned} L = & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + x_1 (c_1 - a_{11} \lambda_1 - a_{21} \lambda_2 - a_{31} \lambda_3) + \\ & + x_2 (c_2 - a_{12} \lambda_1 - a_{22} \lambda_2 - a_{32} \lambda_3) = G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \\ & + x_1 (c_1 - f_1) + x_2 (c_2 - f_2) + x_3 (c_3 - f_3) \end{aligned} \quad (7)$$

ordenada así L, el problema dual consistirá en:

$\min_{\underline{\lambda}} G = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$
con las restricciones (4). Aquí x_1, x_2 son los multiplicadores de Lagrange del problema dual, uno por cada restricción (4).

El planteo general, en lenguaje vectorial será:

dados el vector columna: $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ (T=transpuesta)

el vector columna: $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$

el vector fila: $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$

el vector fila: $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

y la matriz : $A = (a_{ij}) \quad i = m \quad j = n$

e indicando el producto escalar como: $\langle \cdot, \cdot \rangle$, será:

$$\begin{aligned} \text{problema primario: } & \max_{\underline{x}} \langle \underline{c}, \underline{x} \rangle \\ & \text{con } A \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \quad \text{y } \underline{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{problema dual} & : \min_{\underline{\lambda}} \langle \underline{\lambda}, \underline{b} \rangle \\ & \text{con } \underline{\lambda} \cdot A \geq \underline{c} \quad \text{y } \underline{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

vemos que son definiciones simétricas.

Teorema

1) si \underline{x}^* y $\underline{\lambda}^*$ son respectivamente soluciones admisibles del problema primario (8) y dual (9), entonces:

$$\langle \underline{c} \cdot \underline{x}^* \rangle \geq \langle \underline{\lambda}^* \cdot \underline{b} \rangle$$

- 2) si el primario tiene una solución óptima, también la tiene el dual y viceversa, y ambos dan los mismos valores a las funciones objetivo.
- 3) si el primario tiene una solución no acotada, el dual no es factible y a la inversa.
- 4) Holgura complementaria. Si \underline{x}^* y $\underline{\lambda}^*$ son factibles para el primario y el dual respectivamente, entonces \underline{x}^* y $\underline{\lambda}^*$ son óptimos para ambos problemas, respectivamente, sí y solo sí:

$$\langle (\underline{c} - A \cdot \underline{\lambda}^*) \cdot \underline{x}^* \rangle = 0$$

ANEXO 6 TEORIA DE SINGULARIDADES

(a) Bifurcaciones, Atractores y Caos

En el capítulo V se han visto nociones elementales de la estabilidad de sistemas, analizando en ese sentido el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de los puntos de equilibrio o críticos. También se mostró el comportamiento de trayectorias en un entorno de los llamados ciclos límites, definiendo el respectivo concepto de estabilidad.

Se trata en todos estos casos de análisis cuantitativos que analizan, desde el punto de vista de la topología, los comportamientos estructurales locales y globales como si se tratara de un cuadro pintado sobre una superficie de goma. No nos interesa que la goma se deforme, nos interesa cualitativamente lo que ocurre en las cercanías de los puntos especiales o en los haces de trayectorias.

Este enfoque es muy importante y tiene aplicaciones prácticas, especialmente para 'dirigir y orientar' las soluciones numéricas por computadora.

En los últimos diez a quince años, un grupo de investigadores, siguiendo los caminos marcados a principios de siglo por Poincaré y Liapunov, investigaron sistemas muy complejos. Entre ellos, se destaca E.N. Lorenz, un meteorólogo y matemático, que modelizó algunos de los comportamientos de un sistema meteorológico, con un sistema de ecuaciones diferenciales que, pese a tratarse de un sistema determinista, presentaba respuestas turbulentas y cuasi-aleatorias.

Muchos sistemas dinámicos deterministas tienen movimientos tan complejos, con sus trayectorias 'moviéndose' en forma errática y turbulenta, que resulta imposible toda predicción detallada para tiempos grandes. En esos casos se habla de caos y de comportamiento caótico.

Pondremos de manifiesto con un ejemplo, cómo una mínima variación de un parámetro en un sistema de ecuaciones diferenciales, puede provocar cambios abruptos en el cuadro de trayectorias soluciones, inclusive modificando la estabilidad estructural.

Ejemplo 1:

$$\text{Sea } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 - ax_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

siendo el parámetro a : $-1 \leq a \leq +1$

Cuando a : $-1 \leq a \leq 0$ las soluciones son tales que $x_1(t)$ y $x_2(t) \rightarrow 0$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Sin embargo para $a: 0 < a \leq 1$ al sistema tiene una solución periódica única Γ , cuyo período depende de a . En la fig. 1 vemos un esquema de las soluciones para ambos casos:

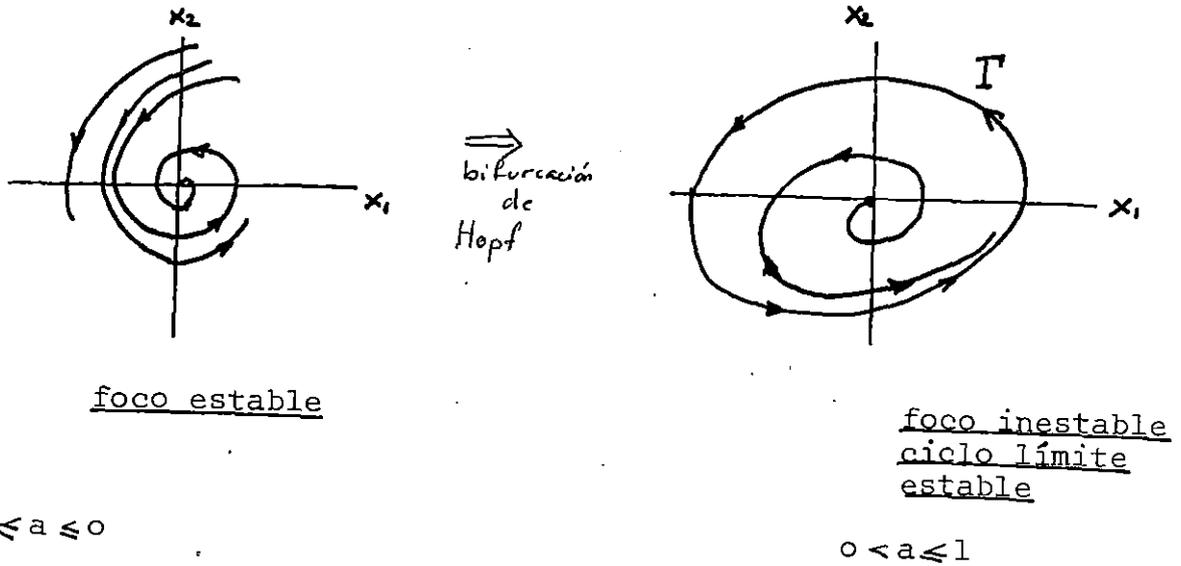


Fig. 1

$a = 0$ es llamado valor de bifurcación del parámetro y en ese valor se produce un cambio sustancial del cuadro de trayectorias solución. Observemos que si el sistema se modeliza para el caso en que realmente $a = 0$, basta que sea $a = \varepsilon > 0$ con ε tan pequeño como se quiera, para que cambie totalmente el comportamiento del mismo. Con $a = 0$ cualquiera sea el punto inicial $x_1(0) x_2(0)$, se tiende siempre al valor $(x_1, x_2) = (0, 0)$ y este punto se llama atractor. Con $a = \varepsilon > 0$ si el punto inicial está en Γ , allí se queda oscilando y si es un punto interior a Γ , termina (x_1, x_2) por acercarse a Γ tanto como se quiera, tomando un valor suficientemente grande de t . Se dice también que Γ es un atractor.

Ejemplo 2:

Consideremos ahora el caso del oscilador armónico amortiguado:

$$x_1 + a x_1 + x_1 = 0 \quad a \geq 0 \quad x_1(0) = x_0 \neq 0 \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

$a =$ factor de amortiguación.

haciendo $\dot{x}_1 = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & ; x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - a \cdot x_2 & ; x_2(0) = 0 \end{cases}$$

cuya ecuación característica nos da:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

nos da $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$ con lo que $\lambda_{1, 2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$

y la solución:

$$\begin{aligned} (x_2(t) &= c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \\) \\ (x_1(t) &= \frac{c_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{c_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Los puntos críticos o de equilibrio se obtienen haciendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ o sea $x_2 = 0$ $x_1 = 0$

Se verifica que $\forall a: 0 < a < 2$, el origen es un foco estable pues los λ_i son del tipo $-a \pm bi$. Para $a=0$ el punto crítico $(0,0)$, dado que $\lambda_1 = 2i; \lambda_2 = -2i$, es un centro.

Para $a \geq 2$, como λ_1 y λ_2 son < 0 , tendremos un nodo estable. (ver cap. V).

Es decir que para todo pasaje de un sistema $0 < a < 2$ al sistema $a=0$ ocurre una bifurcación, en el sentido que se pierde la estabilidad asintótica del origen.

Una pequeña perturbación cambia el cuadro de trayectorias y de estabilidad.

Atractores extraños

En la topología de sistemas dinámicos, es usual distinguir entre un conjunto que es estable y un conjunto que es un atractor. Un conjunto invariante, cerrado S , se dirá estable según Liapunov (V.2) si toda trayectoria permanece tan cerca de S como queramos, tomando el origen de la misma suficientemente cercano a S . Ejemplo de S es una cualquiera de las curvas cerradas que envuelven un nodo.

Diremos que un conjunto cerrado invariante Γ es un atractor, si para todo \underline{x}^0 suficientemente cercano a Γ , la trayectoria $\underline{x}(t)$ que pasa por \underline{x}^0 , tiende a Γ cuando $t \rightarrow \infty$. Es el caso del ciclo límite Γ del ejemplo 1.

Hasta hace unos diez años, los únicos atractores conocidos eran los puntos crítico o de equilibrio, estables, los ciclos límite y los toros. En este último caso se trata de movimientos que constan de dos oscilaciones independientes y se los llama movimientos cuasiperiódicos. Las órbitas se arrollan rodeando al toro. Lorenz, al analizar las condiciones meteorológicas de la atmósfera, obtuvo un sistema de tres grados de libertad que se comporta-

conoce con el nombre de Lorenz, extraño o caótico.

El sistema es:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x) \right. \\ & \left(\frac{dy}{dt} = r x - y - x z \right. \quad \sigma, r, b \quad 0 \\ & \left. \left. \left(\frac{dz}{dt} = x y - b z \right) \right) \right. \end{aligned}$$

el origen $x=y=z=0$ es un punto crítico. Si $0 < r < 1$, es estable y atractivo. En $r=1$ hay una bifurcación.

Resolviendo numéricamente, Lorenz encontró el mecanismo básico responsable del azar observado en el estudio del fluido. Dos órbitas con condiciones iniciales próximas, divergen rápidamente de forma exponencial. En los atractores no caóticos las órbitas vecinas siguen estando cerca y el comportamiento es predecible. En un atractor extraño las órbitas se mezclan, sin entrecruzarse, pues no pueden alejarse indefinidamente. (ver fig. 7).

Los sistemas caóticos generan azar por sí mismos, sin necesidad de influencias aleatorias externas.

Su comportamiento aleatorio se debe más que a la amplificación de los errores y a la pérdida de la capacidad de predecir; se origina por la complejidad de las órbitas generadas.

Algunos investigadores dan una gran importancia epistemológica al estudio de las soluciones caóticas de sistemas dinámicos. La verificación de una teoría consiste en hacer predicciones y contrastarlas con los resultados de experimentos adecuados. Cuando los fenómenos son caóticos, las predicciones a largo plazo resultarían imposibles, por lo que la verificación de las teorías debe basarse en propiedades geométricas y estadísticas, antes que en la predicción.

Pese a lo dicho, nos parece importante señalar que, a nuestro juicio, estos comportamientos de los modelos, se dan en gran medida por verse obligados a usar sistemas de ecuaciones diferenciales en los mismos. En el planteo de una ecuación diferencial se parte de relaciones de vecindad en entornos muy pequeños que luego se hacen tender a cero. Los pequeños e inevitables errores e inexactitudes que aparecen en los parámetros básicos, debido a imprecisiones de medición o conocimiento parcial, son amplificadas por el propio mecanismo diferencial, al crecer el tiempo t .

(b) Teoría de catástrofes ((18))

La teoría de catástrofes, es una nueva forma cualitativa de pensar en el cambio, en un objeto o en el comportamiento de un sistema.

El creador de la teoría es el profesor René Thom, matemático

puro con grandes conocimientos de algunas ramas de la física y tuvo la inestimable colaboración de Christopher Zeeman.

Catástrofe, llama Thom, a cualquier transición discontinua que ocurre cuando un sistema puede tener más de un estado estable o cuando puede seguir más de un estado estable de cambio. La catástrofe es el 'salto' de un estado a otro.

Thom demostró que en cualquier sistema gobernado por un potencial (como el campo eléctrico o gravitatorio), y en el cual el comportamiento está determinado por no más de cuatro factores diferentes, sólo son posibles siete tipos de discontinuidad cualitativamente diferentes. Esto significa que en tales sistemas, sólo hay siete maneras estructuralmente estables para que cambie discontinuamente, o sea pasando por estados de desequilibrio.

Las llamadas catástrofes elementales son las siete maneras de que ocurran las transiciones discontinuas que suceden cuando un sistema tiene más de un estado estable.

Esto se suele ilustrar con gráficos que muestran los estados estables como líneas o superficies en un espacio de estados.

Mientras el sistema ocupa un punto de esas superficies o líneas, su trayectoria es continua, pero cuando lo abandona, es inestable, y debe regresar, generalmente a un punto muy distante del punto inicial.

Los gráficos, permiten incorporar una buena cantidad de información sobre causas y efectos en un diagrama descriptivo y claro. Estos gráficos pueden aplicarse como modelos, si su comportamiento se corresponde con algunos rasgos del sistema y generalmente, su estudio sugiere otros tipos de comportamiento menos obvios.

El gráfico que utilizaremos tendrá una dimensión o eje para cada factor de control que determine el comportamiento del sistema que se analiza. Tendrá además uno o dos ejes (dimensiones) para representar el comportamiento en sí.

En el espacio definido por esas dimensiones, todo estado posible de equilibrio, se representa por un punto único. Un cambio continuo en el comportamiento, aparece como un movimiento dentro de la superficie, mientras que un cambio discontinuo aparece como un movimiento que abandona la superficie. De las siete catástrofes elementales, elegiremos, por sus posibles aplicaciones, la llamada en cúspide.

Este tipo de catástrofe, aparece en sistemas cuyo comportamiento depende de dos factores de control y su representación es una superficie curva con un doblez. Cada punto de esa superficie, representa un estado de equilibrio. (fig. 2).

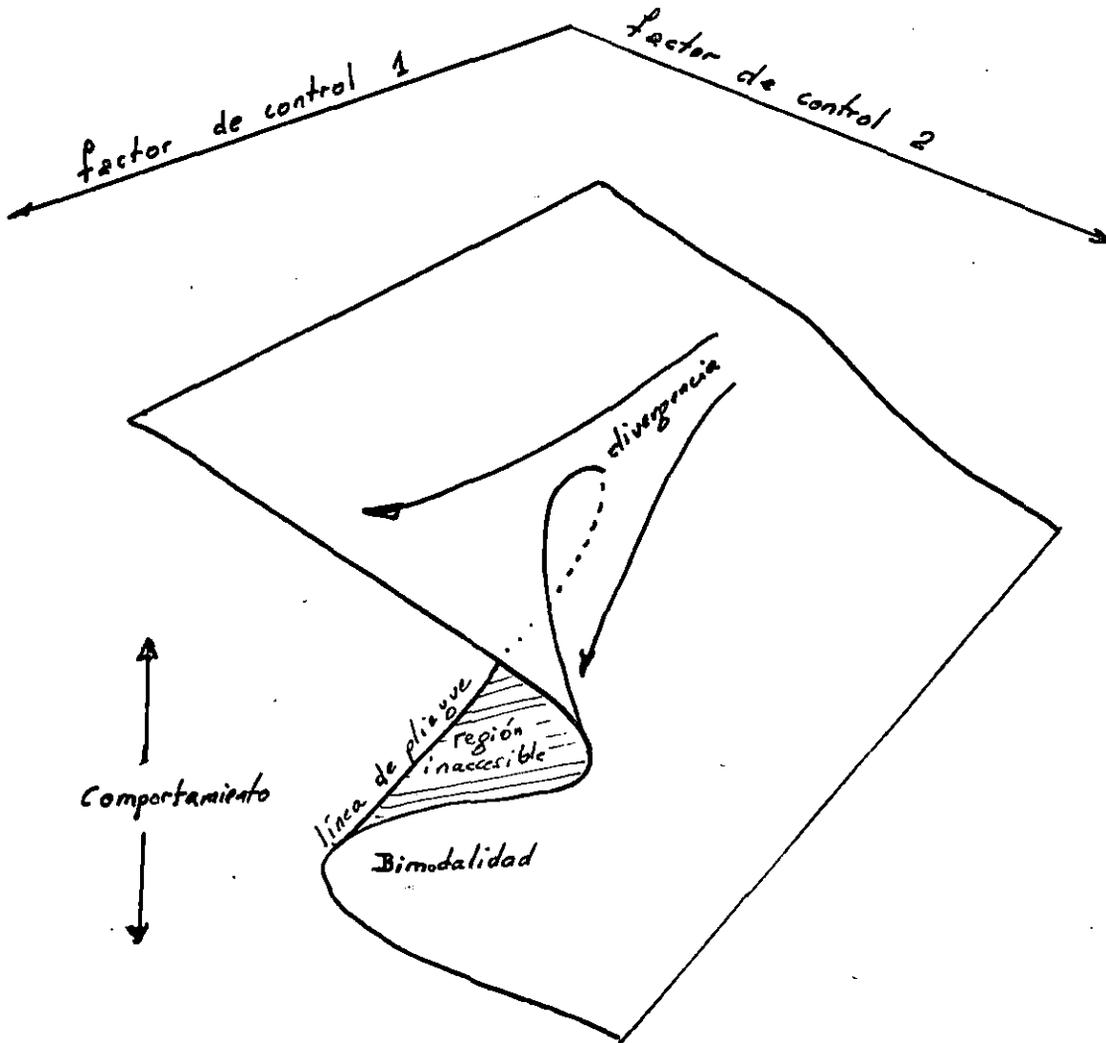


Fig. 2

Todos los puntos de la cara inferior del doblez, son máximos inestables. Todos los puntos a lo largo de la línea de pliegue, son puntos de inflexión semi-estables. Todos los demás puntos son mínimos estables. Hay dos comportamientos posibles, uno en la superficie superior y otro en la inferior del doblez. Este comportamiento se denomina 'bimodal', o sea, las mismas combinaciones de los factores de control, permiten cualquiera de los dos estados estables. En la figura vemos un caso de dos trayectorias próximas, que aumentando el factor de control, divergen pues una queda en la superficie superior del doblez y otra se dirige a la superficie inferior. Este es un cambio suave, no catastrófico.

Hay también cambios discontinuos (fig. 3), los que ocurren cuando un punto que se mueve a la derecha o a la izquierda, llega al labio del doblez.

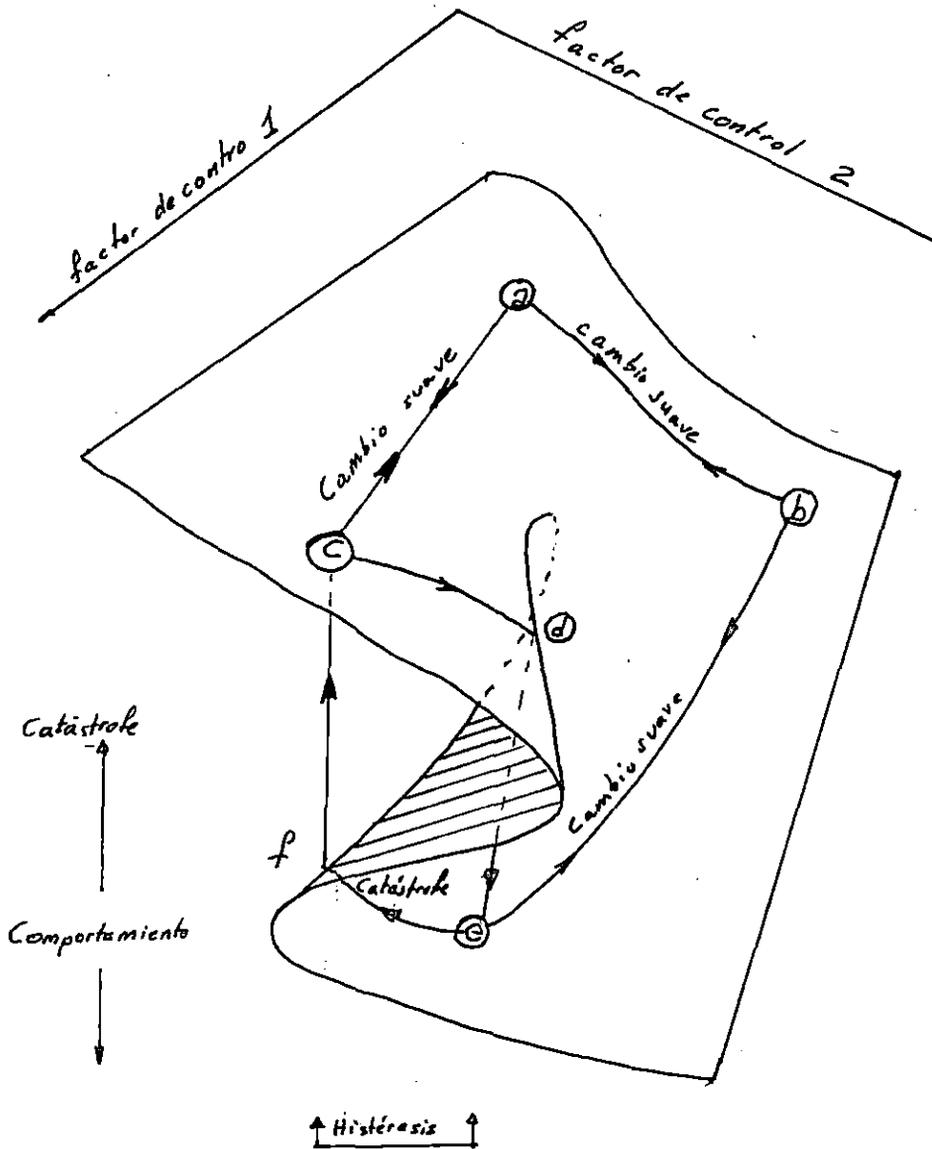


Fig. 3

El sistema puede pasar suavemente de a, a c, de a, a b y de b, a e y volver, pero si el sistema está en c y aumenta el factor 2, el punto llega a d, el mínimo estable se convierte en un punto de inflexión y el sistema salta a c, que es mínimo estable. Esta transición rápida, es una catástrofe.

Si una vez que el sistema está en e, se disminuye el factor 2, se traslada a f y luego salta catastróficamente a c.

Hemos visto que se puede pasar de c, a e suavemente o bien pasando por una catástrofe. Estando en c, si aumentamos y disminuimos convenientemente el factor 2, tendremos el ciclo de comportamiento, llamado histéresis, c-d-e-f-c, con dos partes suaves unidas por dos catástrofes. Se suele encontrar este ciclo en muchos sistemas dinámicos, desde circuitos electromagnéticos, hasta psicosis maniáco-depresivas.

(c) Aplicaciones a la sociología, política y economía

Ej. 1 Veremos un modelo puramente descriptivo de un sistema social, de grandes grupos de personas en momentos críticos de tensión. (ejército, multitudes etc.)

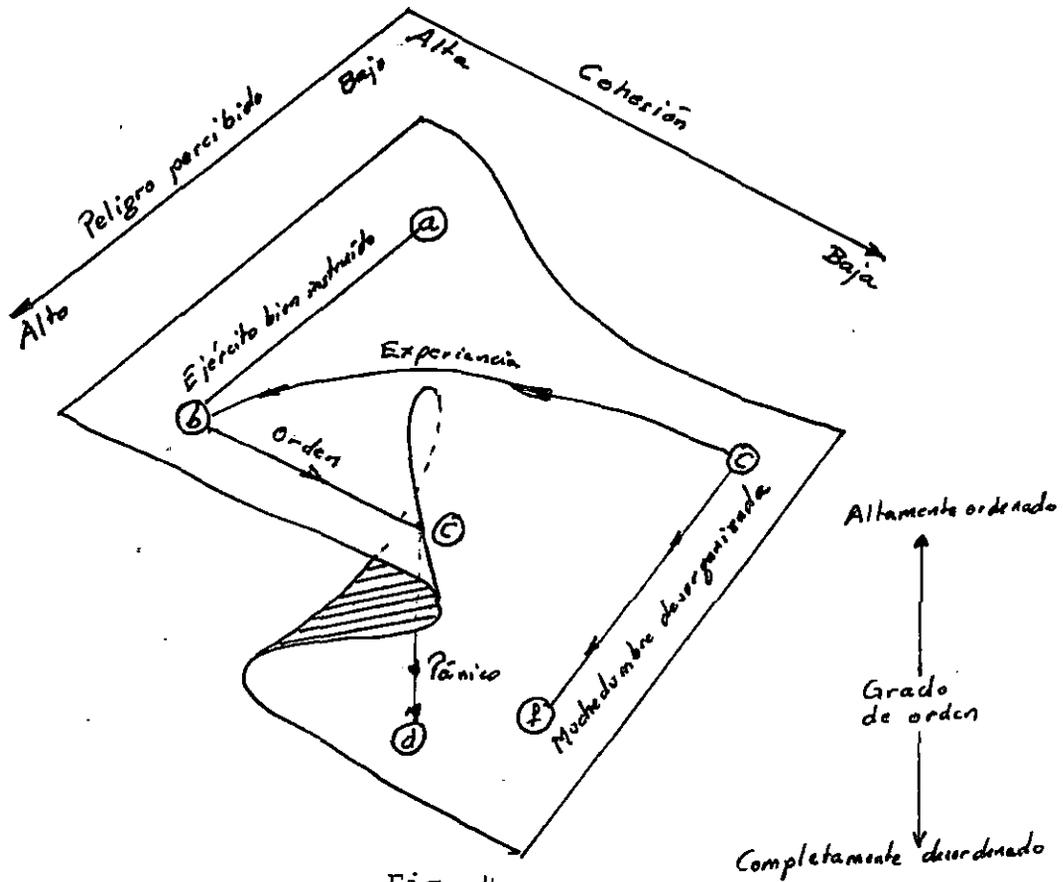


Fig. 4

El modelo en cúspide de la fig. 4 nos ayudará a la comprensión del sistema.

Los factores de control son la cohesión o sea la tendencia de los individuos a identificarse con su grupo y sus objetivos, y el nivel de peligro percibido (real o supuesto).

a-b es el caso de un ejército bien instruido que se coordina más estrechamente, aun al aumentar el peligro.

b-c-d puede representar el caso de disminución de la cohesión, por ejemplo si algunos soldados huyen del campo de batalla, siendo c-d el comportamiento catastrófico.

Una predicción de este modelo es: que cuando el nivel de peligro está a punto de aumentar, inclusive un pequeño aumento de la cohesión, puede ser muy importante.

Ej. 2 Se trata de un sistema de participación política y control.

Usaremos como factores de control el grado de participación popular y el grado de control político central (fig. 5).

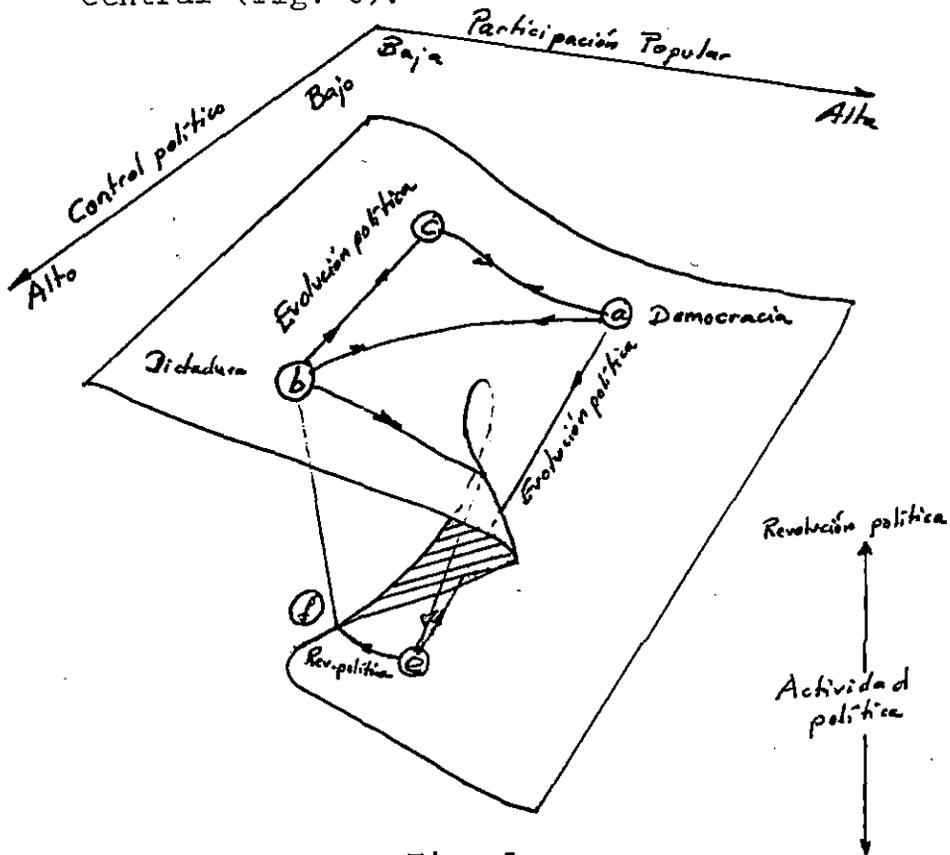


Fig. 5

Con el control central disminuido, un cambio en el nivel de participación popular no produce revueltas políticas. Pueden coexistir muchos partidos políticos (a-c).

Una evolución política gradual, con un aumento del control central, puede llevar o bien de una oligarquía a una dictadura (c-b) o de una democracia a una dictadura del proletariado (a-e). Pero si el control central es ya grande, es probable que un aumento o una disminución pronunciada de la participación popular, provoque una revolución (b-d-e) o (e-f-b).

Ej. 3 Inflación y expectativa

Se reconoce que la expectativa de futura inflación, es un factor importante en este sistema. Si un alto nivel de inflación es la norma, entonces los asalariados exigen salarios más altos para compensar el aumento esperado del costo de vida.

Estos salarios más altos, tienen a su vez un impacto inflacionario cuando los obtienen la mayor parte de los trabajadores.

Esto sugiere un modelo cualitativo de la inflación, con dos factores de control: la tasa esperada de inflación y el desempleo (fig. 6).

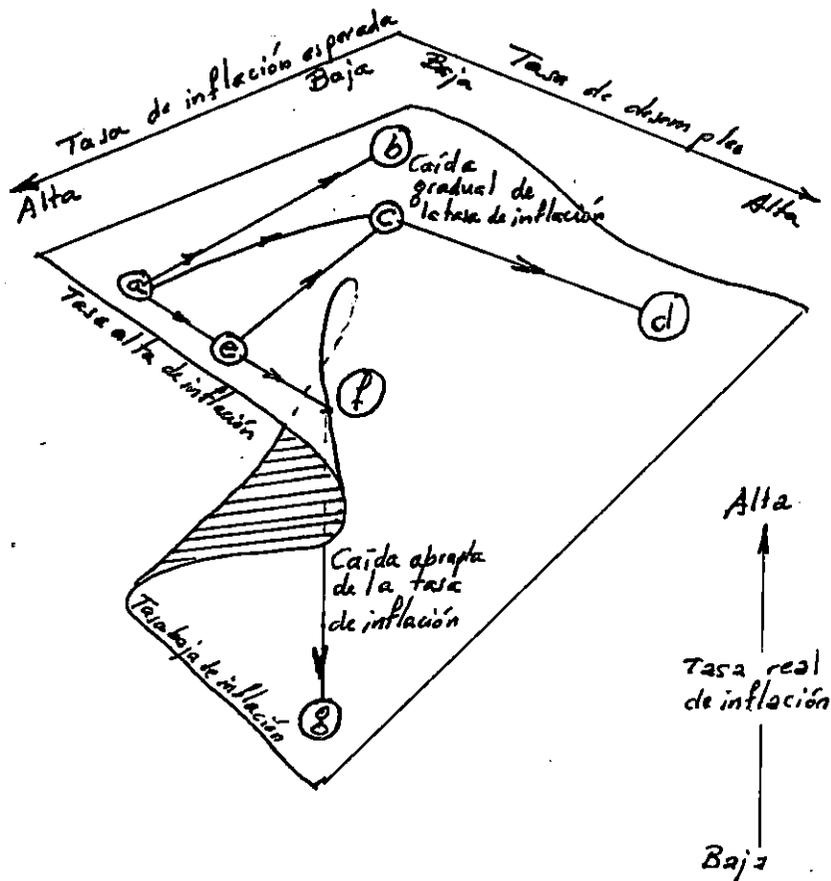
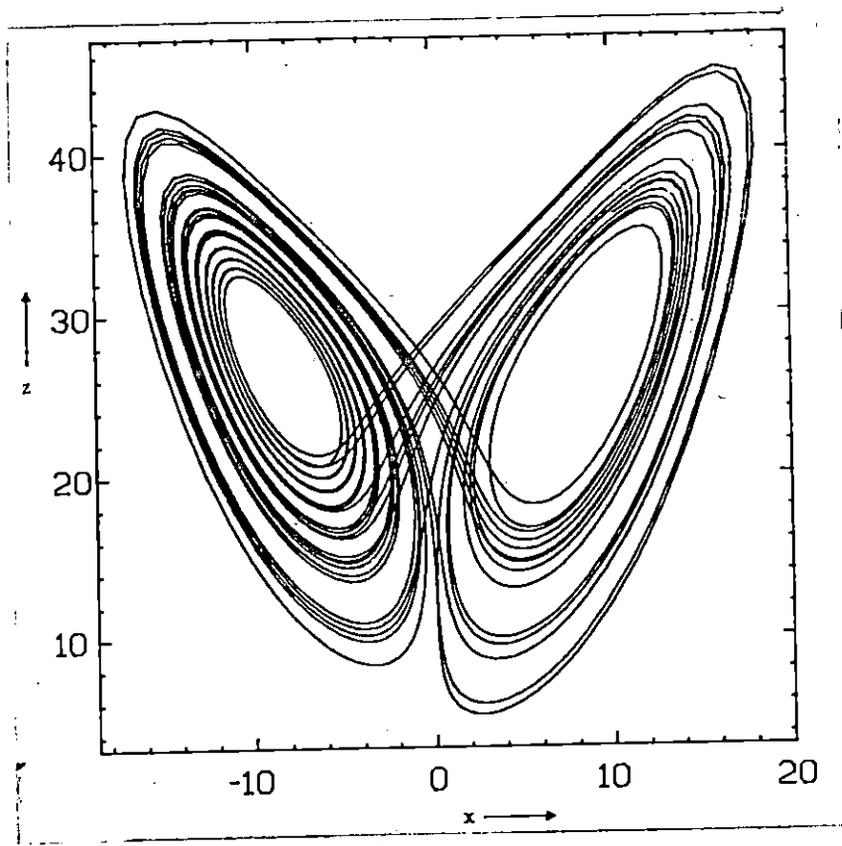


Fig. 6

Una política antiinflacionaria, puede ser un aumento del desempleo y desanimar los aumentos de precios, (a-c-d). Un aumento del desempleo solamente, produciría una ligera caída de la inflación (a-e).

Un entorno de (e), corresponde a inflación con recesión. Salir de esta región a una de menor inflación, requiere un incremento del desempleo (e-f-g), o preferiblemente un ligero incremento del desempleo junto con efectivas medidas, dignas de crédito, para reducir la inflación futura. (e-c).

El punto (c) es crítico en el sentido que un incremento en la inflación esperada en ese punto, puede tener efectos divergentes sobre la tasa real de inflación.



Solución numérica de la ecuación de Lorenz proyectada en el plano x, z ($\sigma = 10$; $b = 8/3$; $r = 28, 0$). (Corresponde al punto (a), pág. 4)

Fig. 7

BIBLIOGRAFIA

1. YVES ALBOUX. 'Análisis de Costos Marginales y Diseño de Tarifas de Electricidad y Agua'. Banco Interamericano de Desarrollo. 1983
2. A. AUSLANDER. 'Optimisation, Méthodes Numériques'. Masson 1976.
3. RICHARD BELLMAN y STUART DREYFUS. 'Applied Dynamic Programming'. Princeton University Press. 1962.
4. JOHN L. CASTI. 'Non Linear System Theory'. Academic Press Inc. 1985.
5. VIRA CHANKONG y YACOV Y. HAIMES. 'Multiobjective Decision Making. Theory and Methodology'. North Holland. 1983.
6. KEMAL DERVIS, JAIME DE MELO, SHERMAN ROBINSON. 'General Equilibrium Models for Development Policy'. World Bank Research Publication. Cambridge University 1982.
7. OLLE ELGERD. 'Control Systems Theory'. McGraw Hill 1967.
8. MICHAEL D. INTRILIGATOR. 'Optimización Matemática y Teoría Económica'. Prentice Hall International. 1973.
9. DAVID G. LUENBERGER. 'Introduction to Dynamic Systems Theory. Models and Applications'. John Willey & Sons. 1979.
10. GEORGE J. KLIR. 'Teoría General de Sistemas'. Ediciones ICE 1980.
11. YU M. KORSHUNOV. 'Fundamentos Matemáticos de la Cibernética'. Mir Ed.
12. JOSEPH LA SALLE y SOLOMON LEFSCHETZ. 'Stability by Liapunov's Direct Method'. Academic Press 1961.

13. L. S. PONTRYAGIN; V.G. BOLTYANSKII; R.V. GRAMKRELIDZE and E.F. MISHCHENKO. 'The Mathematical Theory of Optimal Processes'. Interscience Publishers. John Willey & Sons, 1962
14. WILLIAM A. PORTER. 'Modern Foundations of Systems Engineering'. The Macmillan Co. 1966.
15. JOHN von NEUMANN & OSKAR MORGENSTERN. 'Theory of Games and Economic Behavior'. Ed. Princeton University.
16. L. von BERTALANFFY, W. ROSS ASHBY, G.M. WEINBERG y col. 'Tendencias en la teoría general de sistemas'. Alianza Editorial.
17. D. BOUILLE y H. PISTONESI. 'Elementos de Economía para Ingenieros' IDEE, 1984.
18. A. WOODCOCK y MONTE DAVIS. 'Teoría de las catástrofes'. Ed. Cátedra.

Trabajo de Análisis de Sistemas

Presentado por:

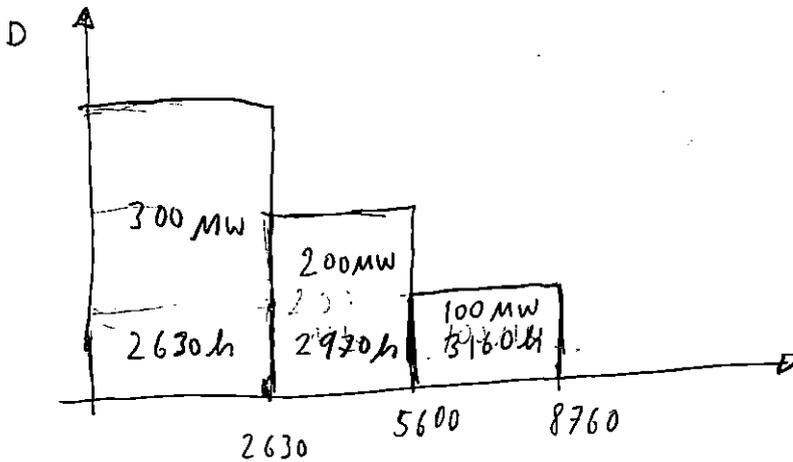
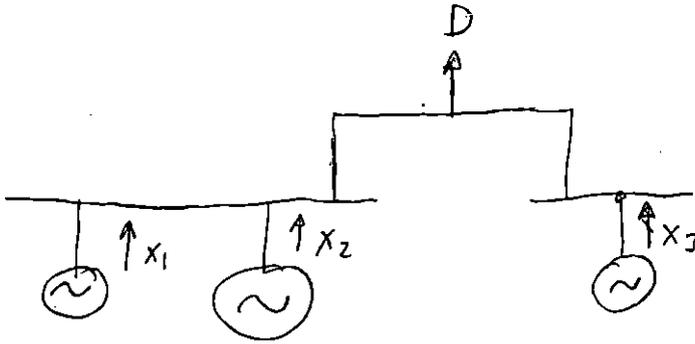
- Fatima L. Bogado V.
- Margaret E. Franco B.
- Mario R. Jolon H.
- Pablo E. Casallas G.
- Ildelfonso Rojas E.
- Carlos A. Valencia E.

(El cartel)

Por Metodo de Lagrange

(1)

1)



Costos:

$$G(X_1) = (0,006 X_1^2 + 2 X_1) 10^6 \text{ Kcal/hora} \quad (X_1 \text{ en MW})$$

$$G(X_2) = (0,01 X_2^2 + 1,5 X_2 + 120) 10^6 \text{ Kcal/hora}$$

$$G(X_3) = (0,009 X_3^2 + 1,65 X_3) 10^6 \text{ Kcal/hora}$$

$$100 > X_1 > 10 \text{ MW} \quad 120 > X_2 > 15 \text{ MW}$$

$$115 > X_3 > 120 \text{ MW} \quad 120 > X_3 > 15 \text{ MW}$$

Pérdidas: Transmission

$$P_L = 0,1 X_1 + 0,15 X_2 \quad (X_1, X_2 \text{ en MW})$$

Minimizar costos:

$$C(x_i) = 6(x_1) + 6(x_2) + 6(x_3)$$

$$C(x_i) = 0,006x_1^2 + 2x_1 + 0,01x_2^2 + 1,5x_2 + 1200 + 0,009x_3^2 + 1,65x_3$$

sujeto a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 0,1x_1 + 0,15x_2 = D$$

$$0,9x_1 + 0,85x_2 + x_3 = D$$

$$100 > x_1 > 10$$

$$120 > x_2 > 15$$

$$115 > x_3 > 20$$

Costos en Kc.l/Korava
xi en MW

Men $L(x_i, \lambda) = 0,006x_1^2 + 2x_1 + 0,01x_2^2 + 1,5x_2 + 0,009x_3^2 + 1,65x_3 + 1200 + \lambda(D - 0,9x_1 + 0,85x_2 - x_3)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,012x_1 + 2 - 0,9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,0133x_1 + 2,222 \text{ con } 10 < x_1 < 100$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,02x_2 + 1,5 - 0,85\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0,0235x_2 + 1,765 \text{ con } 15 < x_2 < 120$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 0,018x_3 + 1,65 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0,018x_3 + 1,65 \text{ con } 20 < x_3 < 115$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = D - 0,9x_1 - 0,85x_2 - x_3 = 0$$

de $x_1 = 10 \Rightarrow \lambda_1 = 2,355$ $x_2 = 15 \Rightarrow \lambda_2 = 2,1175$

$x_1 = 100 \Rightarrow \lambda_1 = 3,552$ $x_2 = 120 \Rightarrow \lambda_2 = 4,585$

de $x_3 = 20 \Rightarrow \lambda_3 = 2,01$

de $x_3 = 115 \Rightarrow \lambda_3 = 3,72$

(Ver figura II)

Para demanda entre 10 y 15 se despacha la maquina 1 por ser la que tecnicamente cumple con el rango y el costo marginal es
 Varía entre 2,355 y 2,422

Para demanda entre 15 y 20 se despacha la maquina 2 porque cumple tecnicamente y el costo marginal es menor que el de la maquina 1. El costo Marginal Varía entre 2,118 y 2,235

Iguando λ_3 y λ_2

$$X_3 = 1,3056 X_2 + 6,3889$$

$$X_2 = 15 \rightarrow X_3 = 25,97 \quad D = X_2 + X_3 = 40,97$$

$$\lambda_3 = \lambda_2 = 2,118$$

Para demanda entre 20 y 40,97 se despacha la maquina 3 que cumple tecnicamente y tiene el menor costo marginal variando este entre
 2,201 y 2,118

igualando λ_2 y λ_1

$$X_2 = 0,56596 X_1 + 19,447$$

igualando λ_3 y λ_1

$$X_3 = 0,7389 X_1 + 31,778$$

$$X_1 = 10 \rightarrow X_2 = 25,11$$

$$\rightarrow X_3 = 39,17 \quad D = 74,28$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2,355$$

$$X_1 = 100 \rightarrow X_2 = 76,04$$

$$\rightarrow X_3 = 105,67 \quad D = 281,71$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3,552$$

Entre 40,97 y 74,28 se despachan las maquinas
2 y 3 con un corte marginal variando
entre 2,118 y 2,355

Entre 74,28 y 281,71 se despachan las maquinas
1, 2 y 3 con un corte marginal variando
entre 2,355 y 3,552

Entre 281,71 y 335 se despachan las 3 maquinas
pero el corte marginal es el de la maquina 2
que varia entre 3,552 y 4,585

(4)

Para la demanda de 300 MW se despachan las moquinas 1, 3 a su máxima potencia que son las de menor costo marginal, y la moquina 2 daera:

$$0,9x_1 + 0,85x_2 + x_3 = D$$

$$0,9 \times 100 + 0,85x_2 + 115 = 300$$

$$x_2 = 117,76$$

el total seria

$$\text{Despacho} = x_1 + x_2 + x_3 = 326,76 \text{ MW}$$

26,76 MW para perdidas

el costo marginal seria el de la moquina 2 igual a 4,391

De las ecuaciones de $\frac{\partial L}{\partial x_i}$:

$$x_1 = 75\lambda + 166,67 \quad (1)$$

$$x_2 = 42,5\lambda - 75 \quad (2)$$

$$x_3 = 55,56\lambda - 91,67 \quad (3)$$

x_1, x_2 y x_3 en $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$

$$\lambda = 0,006282D + 1,91867 \quad (4)$$

Para una demanda de 200 MW reemplazamos en ④

$$\lambda = 3,175$$

reemplazando λ en ①, ②, ③

$$X_1 = 71,46$$

$$X_2 = 59,94 \quad X_{1,2} = 213,14 \text{ MW}$$

$$X_3 = 84,74$$

$$\text{Despacho} = X_1 + X_2 + X_3 = 216,14 \text{ MW}$$

16,14 MW para pérdidas

Para demanda de 100 MW reemplazamos en ④

$$\lambda = 2,547$$

reemplazando λ en ①, ②, ③

$$X_1 = 24,36$$

$$X_2 = 33,25$$

$$X_3 = 49,84$$

$$\text{Despachados} = X_1 + X_2 + X_3 = 107,45 \text{ MW}$$

7,45 MW para pérdidas

Total despacho de 300 MW $D_1 = 326,76 \times 2630 \text{ MWh}$
 $D_1 = 859.378 \text{ MWh} = 859,38 \text{ GWh}$

Costo $C_1 = [(0,006(100)^2 + 2(100)) + (0,01(111,76)^2 + 1,5(111,76) + 120)$
 $+ (0,009(1115)^2 + 1,65(1115))] \times \frac{10^6 \text{ Kcal}}{\text{h}} \times \frac{\text{US\$ } 10}{10^6 \text{ Kcal/h}} \times 2630$
 $C_1 = \text{US\$ } 25'808.663$

Para el ingreso se toma en cuenta lo despacho aumentando que la Tarifa del Consumidor se le incluyen las perdidas por transmision

Ingreso $I_1 = 85.9378 \text{ MWh} \times \frac{4,391 \times 10^6 \text{ Kcal/h}}{\text{MWh}} \times \frac{\text{US\$ } 10}{10^6 \text{ Kcal/h}}$
 $I_1 = \text{US\$ } 37'735.288$

Total despacho de 200 MW $D_2 = 216,14 \times 2970 \text{ MWh}$
 $D_2 = 641.936 \text{ MWh} = 641,94 \text{ GWh}$

Costo $C_2 = [(0,006(71,46)^2 + 2(71,46)) + (0,01(59,94)^2 + 1,5(59,94) + 120)$
 $+ (0,009(84,74)^2 + 1,65(84,74))] \times 10 \times 2970$
 $C_2 = \text{US\$ } 18'528.227$

Ingreso $I_2 = 641.936 \times 3,175 \times 10$
 $I_2 = \text{US\$ } 20'381.468$

Total despachado 100 MW $D_3 = 107,45 \times 3160 \text{ MWh}$

$$D_3 = 339.542 \text{ MWh} = 339,546 \text{ GWh}$$

$$\text{Costo } C_3 = [(0,006(24,36)^2 + 2(24,36)) + (0,01(33,25)^2 + 1,5(33,25) + 120) + (0,009(49,84)^2 + 1,65(49,84))] \times 10 \times 3160$$

$$C_3 = \text{US\$ } 10'674.585$$

$$\text{Ingreso } I_3 = 339.542 \times 2,547 \times 10$$

$$I_3 = \text{US\$ } 8'648.135$$

ojo Perdidas

$$\text{TOTAL DESPACHADO} = 1840,86 \text{ GWh}$$

$$\text{COSTO TOTAL} = \text{US\$ } 55'011$$

$$\text{INGRESO TOTAL} = \text{US\$ } 66'765$$

$$\text{BENEFICIOS NETOS} = \text{US\$ } 11'754$$

Minimizar custos D_1

$$C_1(x_i) = G(x_1) + G(x_2)$$

$$C_1(x_i) = 0,006x_1^2 + 2x_1 + 0,01x_2^2 + 1,5x_2 + 120$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 = D_1$$

$$100 > x_1 > 10$$

$$120 > x_2 > 15$$

$$\text{Min } L(x_i, \lambda) = 0,006x_1^2 + 2x_1 + 0,01x_2^2 + 1,5x_2 + 120 + \lambda(D_1 - x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,012x_1 + 2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,012x_1 + 2 \quad \text{com } 10 < x_1 < 100$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,02x_2 + 1,5 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0,02x_2 + 1,5 \quad \text{com } 15 < x_2 < 120$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = D - x_1 - x_2 = 0$$

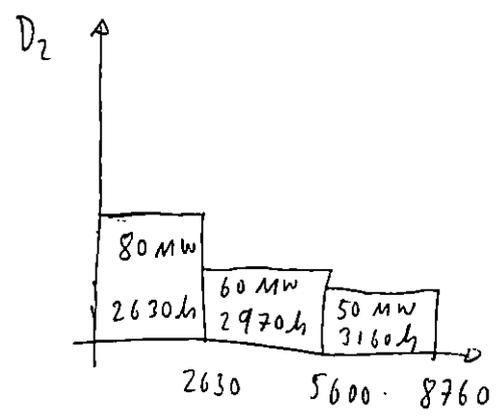
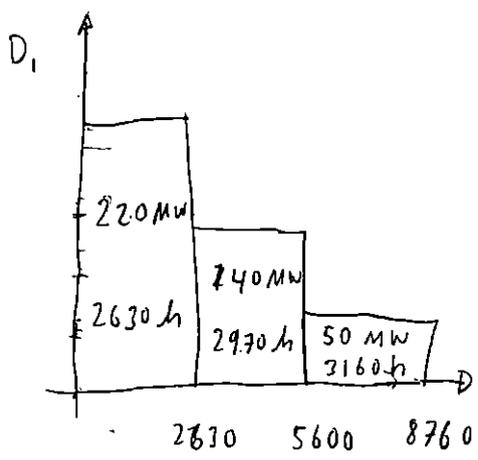
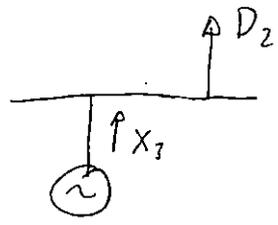
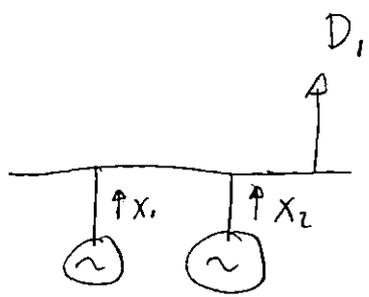
$$x_1 = 10 \rightarrow \lambda_1 = 2,12$$

$$x_1 = 100 \rightarrow \lambda_1 = 3,20$$

$$x_2 = 15 \rightarrow \lambda_2 = 1,8$$

$$x_2 = 120 \rightarrow \lambda_2 = 3,9$$

2)



costos:

$$G(x_1) = (0,006 x_1^2 + 2 x_1) 10^6 \text{ Kcl/hora}$$

$$G(x_2) = (0,01 x_2^2 + 1,5 x_2 + 120) 10^6 \text{ Kcl/hora}$$

$$G(x_3) = (0,009 x_3^2 + 1,65 x_3) 10^6 \text{ Kcl/hora}$$

$$100 > x_1 > 10 \text{ MW} \quad 120 > x_2 > 15 \text{ MW}$$

$$115 > x_3 > 20 \text{ MW}$$

No se consideran perdidas en la transmision.

Iguales λ_2 y λ_1

$$X_2 = 0,6 X_1 + 25$$

$$X_1 = 10 \rightarrow X_2 = 31$$

$$D = X_1 + X_2 = 41$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,12$$

$$X_1 = 100 \rightarrow X_2 = 85$$

$$D = 185$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3,2$$

Demandas entre 10 y 15 se despacha

la maquina 1 que aunque tiene costo Marginal mas alto, es la que cumple con el requisito tecnico.

el costo Marginal varia entre 2,12 y 2,18

Demandas 15 y 41 se despacha la maquina 2 ya que el requisito tecnico lo permite y es la de menor costo marginal,

al penales; el cual varia entre 1,8 y 2,12

Demandas entre 41 y 185 se despachan

las 2 maquinas con un costo marginal que varia entre 2,12 y 3,2

Para demandas entre 185 y 220 el costo marginal mas bajo es el de la maquina 1, por lo tanto, se despacha esta a su maxima potencia y lo faltante lo aporta la maquina 2.

El costo marginal es el de la maquina 2, que varia entre 3,2 y 3,9

Demanda de 220 MW se despachan las 2 maquinas a su maxima potencia

$$X_1 + X_2 = 100 + 120 = 220 \text{ MW}$$

$$\lambda = 3,9$$

De las ecuaciones $\frac{\partial L}{\partial X_i}$:

$$X_1 = 83,33\lambda - 166,67 \quad (1)$$

$$X_2 = 50\lambda - 75 \quad (2)$$

X_1, X_2 en $\frac{\partial L}{\partial X}$

$$\lambda = 0,0075D + 1,8125 \quad (3)$$

Para una demanda de 140 MW reemplazamos en ③

$$\lambda = 2,8625$$

reemplazando en ①, ②

$$X_1 = 71,87$$

$$X_2 = 68,13$$

$$\text{Despacho} = X_1 + X_2 = 140 \text{ MW}$$

Para demanda de 50 MW reemplazamos en ③

$$\lambda = 2,1875$$

reemplazando en ①, ②

$$X_1 = 15,62$$

$$X_2 = 34,38$$

$$\text{Despacho} = X_1 + X_2 = 50 \text{ MW}$$

Total Despachado 220 MW $D_{11} = 220 \times 2630 \text{ MWh}$

$$D_{11} = 578.600 \text{ MWh} = 578,6 \text{ GWh}$$

$$\text{Costo } C_{11} = [(0,006(100)^2 + 2(100)) + (0,01(120)^2 + 1,5(120) + 120)]$$

$$\times 10 \times 2630$$

$$C_{11} = \text{US\$ } 18'515.200$$

$$\text{Ingreso } I_{11} = 578.600 \times 3,9 \times \text{US\$ } 10$$

$$I_{11} = \text{US\$ } 22'565.400$$

Total despachado 140 MW $D_{1,2} = 140 \times 2970$ MWh

(14)

$$D_{1,2} = 415.800 \text{ MWh} = 415,8 \text{ GWh}$$

$$\text{Costo } C_{1,2} = [(0,006(71,82)^2 + 2(71,82)) + (0,01(68,13)^2 + 1,5(68,13) + 120)] \times 10 \times 2970$$

$$C_{1,2} = \text{US\$ } 13'167.309$$

$$\text{Ingreso } I_{1,2} = 415.800 \times 2,8625 \times 10$$

$$I_{1,2} = \text{US\$ } 11'902.275$$

ojo deficit

Total despachado 50 MW $D_{1,3} = 50 \times 3160$

$$D_{1,3} = 158.000 \text{ MWh} = 158 \text{ GWh}$$

$$\text{Costo } C_{1,3} = [(0,006(15,62)^2 + 2(15,62)) + (0,01(34,38)^2 + 1,5(34,38) + 120)] \times 10 \times 3160$$

$$C_{1,3} = \text{US\$ } 6'828.563$$

$$\text{Ingreso } I_{1,3} = 158.000 \times 2,1875 \times 10$$

$$I_{1,3} = \text{US\$ } 3'456.250$$

ojo deficit

SUBTOTAL DESPACHADO $D_1 = 1152,4 \text{ GWh}$

SUBTOTAL INGRESO $I_1 = \text{US\$ } 37'924$

SUBTOTAL COSTO $C_1 = \text{US\$ } 38'511$

ojo deficit

La demanda D_2 se cumple toda con la maquina 3 la cual tiene un costo de

$$G = 0,009 X_3^2 + 1,65 X_3$$

luego su costo marginal esta dado por:

$$\frac{\partial G}{\partial X_3} = 0,018 X_3 + 1,65 = \lambda_3$$

$$X_3 = 80 \rightarrow \lambda_3 = 3,09$$

$$X_3 = 60 \rightarrow \lambda_3 = 2,75$$

$$X_3 = 50 \rightarrow \lambda_3 = 2,55$$

$$\text{Total despachado } D_{21} = 80 \times 2630 = 210.400 \text{ MWh}$$

$$\text{Costo } C_{21} = [0,009(80)^2 + 1,65(80)] \times 2630 \times 10 = \text{US\$ } 4'986.480$$

$$\text{Ingreso } I_{21} = 210.400 \times 3,09 \times 10 = \text{US\$ } 6'501.360$$

$$\text{Total despachado } D_{22} = 60 \times 2970 = 178.200 \text{ MWh}$$

$$\text{Costo } C_{22} = [0,009(60)^2 + 1,65(60)] \times 2970 \times 10 = \text{US\$ } 3'902.580$$

$$\text{Ingreso } I_{22} = 178.200 \times 2,75 \times 10 = \text{US\$ } 4'900.500$$

ojo deficit

Total despachado $D_{23} = 50 \times 3160 = 158.000 \text{ MWh}$

Costo $C_{23} = [0,009(50)^2 + 1,65(50)] \times 3160 \times 10 = \text{US\$} 3'318.000$

Ingreso $I_{23} = 158.000 \times 2,55 \times 10 = \text{US\$} 4'029.000$

SUBTOTAL DESPACHADO $D_2 = 546,6 \text{ GWh}$

SUBTOTAL INGRESO $I_2 = \text{US\$} 15'430$

SUBTOTAL COSTO $C_2 = \text{US\$} 12'207$

Totales con las 2 demandas

TOTAL DESPACHADO $= 1699 \text{ GWh}$

COSTO TOTAL $= \text{US\$} 50'718$

INGRESO TOTAL $= \text{US\$} 53'355$

BENEFICIOS NETOS $= \text{US\$} 2'637$

Se consideran otros beneficios asociados a la interconexión (confiabilidad, uso óptimo, reducción de pérdidas, etc).

Al comparar los resultados totales se ve que el sistema interconectado

obtiene mejores beneficios, lo cual se explica al analizar los resultados parciales, en los cuales se notan algunos deficit debido a que para ciertas demandas algunas plantas estan trabajando por debajo de su optimo, o lo que es lo mismo sus costos marginales son superiores al costo medio, lo cual no ocurre en el sistema interconectado, el cual permite una mejor asignacion de despacho.

333.7932

5116a

Eq 4

Análisis de sistemas Luis Saravia; Instituto de
Economía Energética, IDEE; Fundación
Bariloche, FB

333.7932 S161a Ej.1

CATALOGADO POR: HELP FILE LTDA

FECHA

PRESTADO A

FECHA
DEVUELTO